FEIXIANXING BODONG FANGCHENG

非线性波动方程

方道元　编著





ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

FEIXIANXING
BODONG
FANGCHENG

ISBN 978-7-308-06131-5



定价：35.00元

非线性波动方程

方道元　编著



ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

非线性波动方程 / 方道元编著. —杭州：浙江大学出版社，2008.8

ISBN 978-7-308-06131-5

Ⅰ. 非… Ⅱ. 方… Ⅲ. 非线性方程:波动方程—研究生—教材 Ⅳ. O175.27

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 115633 号

非线性波动方程

方道元　编著

责任编辑　徐素君
封面设计　刘依群
出版发行　浙江大学出版社
（杭州天目山路 148 号　邮政编码 310028）
（E-mail:zupress@mail.hz.zj.cn）
（网址:http://www.zjupress.com
http://www.press.zju.edu.cn）
电话:0571—88925591，88273066(传真)
排　　版　杭州中大图文设计有限公司
印　　刷　浙江中恒世纪印务有限公司
开　　本　787mm×1092mm　1/16
印　　张　17.25
字　　数　410 千
版 印 次　2008 年 8 月第 1 版　2008 年 8 月第 1 次印刷
书　　号：ISBN 978-7-308-06131-5
定　　价：35.00 元

前　言

本书是以作者多年来为浙江大学数学系偏微分方程方向研究生开设的《非线性波动方程》课程的讲稿为基础, 参考国内外一些同类型的教材、专著, 经过反复讨论、多次修改补充编写而成。可以作为综合性大学或师范院校数学系偏微分方程或其他专业的研究生和青年学者作研究入门参考书或教材。相信在阅读完本书的大部分内容之后即可进入现代偏微分方程分析的研究领域。

本书的主要内容是介绍非线性波动方程的局部或整体适定性理论、研究方法, 以及解的破裂性质等。第一章, 介绍了一些可用变分方法导出的方程与方法, 讨论了方程中的一些重要的不变特征及其作用, 以及定解问题的提法与研究解的存在性问题的常用方法等。第二章回顾和介绍了研究偏微分方程理论所需的现代分析或调和分析基础, 其中包括可积空间、可微空间、Sobolev 空间以及它们之间的一些重要的定性性质和定量关系。最大函数及其应用, 局部化方法与不确定性原理, 稳定位相法, Gagliardo-Nirenberg 不等式, Moser 型估计等一些常用的非线性估计, Fourier 限制定理及其各种证明方法等。第三章主要介绍线性波动方程解的表示, 解在 Sobolev 框架下的存在唯一性, 能量不等式, 衰减估计, Strichartz 估计, 双线性估计以及波 -Sobolev 空间及其估计等。第四章主要介绍非线性波动方程的局部适定性理论, 其中包括 Sobolev 框架、可微函数空间框架下的局部解以及满足零条件方程的局部解理论等。第五章介绍了一些典型波动方程经典解的破裂与奇性的形成以及生命区间的刻画等例子。第六章主要讨论了小振幅初值解的整体存在性问题。首先用连续性方法证明了高维拟线性波动方程的整体解的存在性, 零条件以及低维情形的整体解。然后给出非线性 Klein-Gordon 方程的整体解常用研究方法。最后, 讨论了半线性情形的波动方程, 以及它们的低正则解等。第七章讨论一些大振幅初值的半线性波动方程的整体适定性问题以及研究方法, 其中包括具有整体 Lipschitz 非线性项的波动方程的整体解; 半线性波动方程的有限能量弱解、经典解以及三个空间变量情形的低正则解等。

本书的编著得到了许多教师及作者的一些研究生的大力支持, 他（她）们对本书的原稿提过不少有价值的建议。内容的取材参考了目前国内外同类型的教材与著作。部分分析基础的内容来自于作者所记的 S. Klainerman 于 1998 年在法国巴黎高师开设的相应课程的笔记, 也含有作者所带团队的部分研究成果。在此向这些作者、授课者以及未曾提及的作者深表感谢! 本书的出版得到了数学系应用数学重点学科在经费上的支持, 在此表示衷心的感谢。由于受时间和水平的限制, 书中一定存在不少缺点和错误, 恳切希望读者提出批评和指正。

作者

2008 年 5 月于求是园

目录

第一章 概 论

§1.1 引 言

我们知道在几何、物理中都有大量的偏微分方程。如 Laplace 方程, Dirac 方程, Hodge 系统, 调和映照方程, Yang-Mills 方程, Ginsburg-Landau 方程, 极小曲面方程, Einstein 度量方程, 热流, Ricci 流, 波动方程, Klein-Gordon 方程, Maxwell 方程, 波映照, Schrödinger 方程, KdV 方程, 守恒律方程组, Navier-Stokes 方程组, Euler 方程组, Boltzman 方程等。几何中研究方程的目的是通过对它们的研究来寻找具有最优几何性质的对象; 物理中人们试图通过对它们的研究来解释和预测一些物理现象或认识物质运动的本质。这些模型方程的导出往往在适当的假设条件下, 利用物质运动所服从的规律、对称、Lagrangian 变分原理等, 或对一些几何或数学物理中的基本方程（组）通过取极限或作一些更进一步的假设、简化得到。

不同的方程之间可能存在着某种形式的或本质的内在联系, 例如我们考虑 $n+1$ 维波动方程 $\frac{1}{c^2}\partial_t^2 u - \Delta u = 0$, 其中 c 是光速, 包含光速 c 的方程称为是相对论的。在一定的光滑性假设下, 如果我们作变换

$$u(t, x_1, \cdots, x_n, x_{n+1}) = \mathrm{e}^{imcx_{n+1}/\hbar} v(t, x_1, \cdots, x_n),$$

v 就成为 n 维 Klein-Gordon 方程 $\frac{1}{c^2}\partial_t^2 v - \Delta v + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}v=0$ 的解, 其中的质量 $m \geq 0$, $\hbar > 0$ 是 Planck 常数。又如果作变换 $v = \mathrm{e}^{-itmc^2/\hbar} w$, 我们可以得

$$i\partial_t w + \frac{\hbar}{2m}\Delta w = \frac{\hbar}{2mc^2}\partial_t^2 w.$$

这样这个相对论 Klein-Gordon 方程的非相对论极限 $c \to \infty$ 收敛于 Schrödinger 方程。如果我们令波动方程中的常数 $c = 1$, 就可以说明 $n+1$ 维波动方程的解 u 与 n 维 Schrödinger 方程 $i\partial_t w + \frac{1}{2}\Delta w = 0$ 的解 w 之间存在着联系 $u(t, x_1, \cdots, x_{n+1}) = \mathrm{e}^{-i(t+x_{n+1})} w(\frac{t-x_{n+1}}{2}, x_1, \cdots, x_n)$。又如 2 维的 Zakharov 系统

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta u = nu \\ \frac{1}{c^2}\partial_t^2 n - \Delta n = \Delta |u|^2 \end{cases}$$

中令 $c \to \infty$ 就会导致非线性 Schrödinger 方程

$$i\partial_t u + \Delta u = -|u|^2 u.$$

另外, Maxwell 方程

$$\partial_t E = c^2 \nabla_x \times B; \quad \partial_t B = -\nabla_x \times E; \quad \mathrm{div} E = \mathrm{div} B = 0;$$

和 Yang-Mills 方程

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta}=0;\quad \partial_\alpha F_{\beta\gamma}+\partial_\beta F_{\gamma\alpha}+\partial_\gamma F_{\alpha\beta}=0$$

之间，其中电场强度 E 和磁场强度 $B:\mathbb{R}^{1+3}\to\mathbb{R}^3$ 是实值向量场，$F:\mathbb{R}^{1+3}\to\bigwedge^2\mathbb{R}^{1+3}$ 是实值的反称 2 形式，这里的 $\mathbb{R}^{1+3}$ 是赋予度量 $\mathrm{d}g^2=c^2\mathrm{d}t^2-\mathrm{d}x_1^2-\mathrm{d}x_2^2-\mathrm{d}x_3^2$ 的 Minkovski 空间; Dirac 方程

$$i\gamma^\alpha\partial_\alpha u+\frac{mc}{\hbar}u=0$$

与 Klein-Gordon 方程之间均存在着联系，其中 $\gamma^0,\cdots,\gamma^3$ 是作用在 4 维复向量空间 V 上的矩阵，满足 $\gamma^\alpha\gamma^\beta+\gamma^\beta\gamma^\alpha=2g^{\alpha\beta}\mathrm{id}_V$，这里的 $g^{\alpha\beta}$ 是上面给出的 Minkovski 度量。

我们将主要讨论非线性波动方程 (NLW) 如：

$$\partial_{tt}u-\Delta u+f(u)=0,$$

但在引入的过程中我们也关心另一些色散型方程的特征，如非线性 Schrödinger 方程 (NLS)

$$iu_t+\Delta u+f(u)=0$$

等。

方程中的非线性项的影响是复杂的。如 $f(u)=u^p$，当 u 大时，起到放大 u 的作用，当 u 小时，可以忽略。它能使一个解在有限时间破裂 (blow up)，也能产生孤波或激波 (如果包含 u 的导数)。这样，非线性项可以直接影响解的大小。有时非线性项的符号也可以造成解的存在性与破裂之间的差异。如我们考虑两个常微分方程

$$V_{tt}+V^3=0\quad 和\quad W_{tt}-W^3=0.$$

第一个方程的解满足 $V_t^2+V^4/2=E=$ 常数，即所有解均在相空间中的一个闭曲线上，对所有时间都成立。对第二个方程，我们有 $W_t^2-W^4/2=E=$ 常数。因此对于给定 $E>0$ 和 $W(0)=W_0$ 的解满足

$$t=\int_{W_0}^{W}(E+\frac{1}{2}s^4)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}s.$$

如果 $W_t(0)>0$，设 T 是上式 $W_0>0\sim\infty$ 的积分，则当 $t\to T$ 时，$W(t)\to\infty$。前一个方程可以解释为是焦散型的，而第二个是焦聚型的，使得其解产生破裂。注意到这样的常微分方程可以看成是零维的波动方程，因此对于波动方程也必有类似的情形。事实上，如果我们考虑 $f(u)=\mu|u|^{p-1}u$ 时 $(\mu\in\{-1,0,1\})$，波动方程的分离变量形式解 $u=\mathrm{e}^{ix\cdot\xi}v(t)$，其中 $v(t)$ 满足

$$\partial_t^2v=-(|\xi|^2+\mu|v|^{p-1})v.$$

我们知道对于线性情形 $\mu=0$，这个方程的解依照时间振荡因子 $\mathrm{e}^{\pm i|\xi|t}$ 演化；而对于相应于焦散的 $\mu=1$ 情形，非线性所起的是放大了线性方程的色散效果的作用；而在 $\mu=-1$ 的焦聚情形，非线性所起的是抵消色散效果。

对于以 $f(u)=u^2$ 或 $-u^2$ 为非线性的 3 个空间维数的 NLW，我们将看到所有 Cauchy 问题的解均会在有限时间破裂，即使是小初值也是如此。这里的符号并不起作用，因为这时如果我们做变换 $u\mapsto -u$ 就可将其中的一个变为另一个。但对于 $f(u)=u^3$ 或 $-u^3$ 就会更复杂一些。对于前者有整体解，并且如果初值是 C^∞ 函数，则其解也是。对于后者，一些初值可导致解的破裂，而另一些初值将又有整体解。对于 $f(u)=u^7$，我们将看到有整体存在的能量弱解，但即使是 C^∞ 初值，其解的光滑性及唯一性仍然是一个未解决的问题。

从数学上看，我们研究偏微分方程的主要兴趣在于试图理解数学物理中的基本方程（组）解的演化问题。虽然方程的个体特征是明显的，它来自于各自的实际问题，有各自的背景，但也有很多的共同特征，我们自然希望能给予分门别类的统一处理。具体地说，我们试图利用方程的某些特征给予分类，按类证实或否定所给问题解的局部或整体存在、唯一性等，确定解何时且如何从一个光滑解导致奇性的形成；寻找一个合适的概念使在适当的初始条件下所给问题的解是存在且唯一的；确定广义解的渐近特征等；以严格的数学方式去理解各种逼近成立的范围，如光速趋于无穷时的牛顿极限，音速趋于无穷时的不可压缩极限，粒子个数趋于无穷时的大范围极限以及雷诺数趋于无穷时的无粘性极限等。通过对一些基本模型方程的研究或分析，发现或建立一些研究几何或物理问题的新工具、方法和概念等。如要处理能越过奇性的解，得发现一个与之相适应的广义解的概念。

§1.2 几何与物理中的一些方程的导出

早在学习数学物理方程时我们就知道诸多运动方程可以通过物质运动所遵循的物理定律如质量守恒、动量守恒和能量守恒等导出。物理学中的一些偏微分方程的导得也可参考李大潜和秦铁虎的《物理学中的偏微分方程》。在此，我们考虑用变分原理来描述一些非线性方程，即用 Lagrangian 场论的 Euler-Lagrangian 方程来描述。Lagrangian 变分原理的基本对象是：时空，如 Minkowski 时空 $(\mathcal{M},g)=\mathbb{R}^{1+n}$，场 ϕ，以及 Lagrangian 密度 L。给定这些对象，我们能定义对应的作用 $\mathcal{L}=\mathcal{L}(\phi,g,K)=\int_K L[\phi]\mathrm{d}v_g$，其中 K 是时空 $\mathbb{R}^{1+n}$ 中的紧集，$\mathrm{d}v_g$ 是时空的测度。场 ϕ 的一个**紧变分**是指定义在 $(-\varepsilon,\varepsilon)$ 上的一个光滑的单参数场 $\phi(s)$ 满足 $\phi(0)=\phi$，且对所有 $\mathbb{R}^{1+n}\setminus K$ 中的点都有 $\phi(s)=\phi$ 的变分。我们将用 $\dot\phi\equiv\frac{\partial\phi}{\partial s}\mid_{s=0}$ 来记这样的变分。如果对任何 ϕ 的紧变分都有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\mathcal{L}(s)\mid_{s=0}=0,$$

我们称场 ϕ 关于作用 $\mathcal{L}$ 是驻定的，其中 $\mathcal{L}(s)=\mathcal{L}[\phi(s)]$。**作用原理**是说物理上可接受的解必须为关于 Lagrangian 密度是驻定的。由作用原理所得到的关于 ϕ 的偏微分方程称为 Euler-Lagrangian 方程。例如设 $x\in\mathbb{R}^n$，$\gamma=\{(t,x);x=x(t),x_0=x(t_0),t_0\le t\le t_1\}$ 是 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ 中的一条曲线段，或看成是某函数空间中的一个点。我们知道曲线 γ 是泛函 $\mathcal{L}(\gamma)=\int_{t_0}^{t_1}L(x,\dot x,t)\mathrm{d}t$ 在过 $x(t_0)=x_0$ 与 $x(t_1)=x_1$ 两点的

曲线之空间的驻定曲线（即变分为零的曲线）或驻点当且仅当沿曲线 $x(t)$ 满足

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)-\frac{\partial L}{\partial x}=0. \tag{1.2.1}$$

这样的方程就是 $\mathcal{L}$ 的 Euler-Lagrangian 方程。在力学系统中，L 可表示为动能减势能。在不同坐标下，驻定曲线可有不同的表达形式，但均满足 Euler-Lagrangian 方程。在物理中通常将 x 记成 q，并记 $p=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$。称 $H(q,\dot{q},t)=p\dot{q}-L(q,\dot{q},t)$ 为 Hamiltonian，它表示的是总能量，即动能加势能。

例 1.2.1 考虑 Lagrangian $L(u)=\frac{1}{2}(|u_t|^2-|\nabla u|^2)$，则可得 u 满足 $\Box u=0$ 当且仅当 u 是 $L(u)$ 的紧支集变分的驻点，其中 $\Box=\partial_t^2-\Delta$。

半线性波动方程 $\Box u=F'(u)$ 的 Lagrangian 可以取为 $L(u)=\frac{1}{2}(|u_t|^2-|\nabla u|^2)+F(u)$。

例 1.2.2 在非线性 Schrödinger 方程 *(NLS)* 中取 $f(u)=\lambda|u|^{p-1}u$，我们可取 Lagrangian 为

$$L(u)=\frac{i}{2}(\bar{u}u_t-u\bar{u}_t)-\frac{1}{2}|\nabla u|^2-\frac{2\lambda}{p+1}|u|^{p+1}$$

例 1.2.3 波映照方程 波映照方程来自于数学物理的 Higgs 场模型，相对论模型等。为写出方程，我们设 (N,g) 是一个赋予 Riemannian 度量结构的 n 维流形，g 是 N 上的正定的双线性形式，称 N 为目标流形。由 Nash 定理，如果 d 足够大，N 嵌入到 $\mathbb{R}^d$ 中。设 $\mathbb{R}^{1+n}$ 是赋予平坦度量 $h=\{-1,1,\cdots,1\}$ 的 Minkovski 时空。这样，n 维波映照方程可以写成如下的形式：

$$u_{tt}-\Delta u-B(u)(\partial_\alpha u,\partial^\alpha u)=0,$$

其中 $B(u):T_uN\times T_uN\longrightarrow T_uN^\perp$ 是 $N\subset\mathbb{R}^d$ 的第二基本形式。特别地，目标流形是 $\mathbb{R}^3$ 中的球面的 *2* 维波映照可以写成

$$u_{tt}-\Delta u+u(|u_t|^2-|\nabla_x u|^2)=0.$$

考虑 Lagrangian

$$L(u)=\int_{\mathbb{R}^{1+n}} g_{ab}(u)\partial^\alpha u^a\partial_\alpha u^b,$$

其中的希腊字母 α,β 表示 $0\sim n$，拉丁字母 a, b, c, d 表示 $1\sim n$，重复指标表示求和。对应的 Euler-Lagrangian 方程就成为

$$-2\partial_\alpha(g_{ab}\partial^\alpha u^b)+\partial_\alpha u^c\partial^\alpha u^b\partial_a g_{bc}=0,$$

或等价地

$$-g_{ab}\partial_\alpha\partial^\alpha u^b-\partial_c g_{ab}\partial_\alpha u^c\partial^\alpha u^b+\frac{1}{2}(\partial_a g_{bc}\partial_\alpha u^c\partial^\alpha u^b)=0.$$

写成达朗贝尔的形式

$$g_{ab}\Box u^b+\partial_c g_{ab}\partial_\alpha u^c\partial^\alpha u^b-\frac{1}{2}(\partial_a g_{bc}\partial_\alpha u^c\partial^\alpha u^b)=0.$$

由 Christoffel 记号 $\Gamma_{cab}=\frac{1}{2}(\partial_a g_{bc}+\partial_b g_{ac}-\partial_c g_{ab})$，以及

$$\partial_a g_{bc}\partial_\alpha u^c\partial^\alpha u^b=\frac{1}{2}(\partial_c g_{ab}\partial_\alpha u^c\partial^\alpha u^b+\partial_b g_{ac}\partial_\alpha u^c\partial^\alpha u^b),$$

我们可以将方程重写成上面的标准形式

$$\Box u^a+\Gamma^a_{bc}\partial_\alpha u^b\partial^\alpha u^c=0.$$

如果将 N 看成是 $\mathbb{R}^{d+1}$ 中的 d 维超曲面，在 N 上引进局部坐标 $(y^1,\cdots,y^d,y^{d+1})$，则 $g_{ab}=\langle\partial_{y^a},\partial_{y^b}\rangle_{\mathbb{R}^{d+1}}$。在局部坐标下的波映照方程可以写为

$$\Box y^a+\Gamma^a_{bc}\partial_\alpha y^b\partial^\alpha y^c=0.$$

我们也容易验证波映照 $v(x)=u(y(x))$ 满足外蕴形式方程

$$\Box v+\sum_{\alpha,\beta=0}^{n}h^{\alpha\beta}B(v)(\partial_\alpha v,\partial_\beta v)=0,$$

其中 $B(p):T_pN\times T_pN\to T_pN^\perp$ 是 $N\subset\mathbb{R}^{d+1}$ 的第二基本形式。

§1.3 方程中的一些不变特征

在偏微分方程的分析理论中，人们发现方程的两个基本特征是重要的。其一是守恒量，甚至也可以是近似的守恒量。这样的量提供了解的大小的一个界的估计，可以让我们通过定量的控制来研究解的长时间性态。它往往可以利用方程的对称性得到。其二是标尺度平衡 (scaling) 或变换的不变性或近不变性，如对于非线性项是 $\mu|u|^{p-1}u$ 的 Schrödinger 方程在标尺度变换

$$u(t,x)\longmapsto\lambda^{\frac{-2}{p-1}}u\left(\frac{t}{\lambda^2},\frac{x}{\lambda}\right),\lambda>0,$$

下不变。而对于相同非线性的波动方程在标尺度变换

$$u(t,x)\longmapsto\lambda^{\frac{-2}{p-1}}u\left(\frac{t}{\lambda},\frac{x}{\lambda}\right)$$

下不变。

一般来说常系数的色散型偏微分方程通常享有一些不变性或对称。如关于时间变量平移不变，关于空间变量平移不变等。有的还具有关于时间的反向对称等，但不变形式不尽相同，如 Schrödinger 方程 $u(t,x)\longmapsto\overline{u(-t,x)}$，波动方程 $u(t,x)\longmapsto u(-t,x)$ 等。也有的享有正交变换不变，Lorentz 变换不变，共形或拟共形变换不变等。一般来说，对应于时间平移不变的守恒量是能量或 Hamilton 量，空向平移不变对应的是动量或质量的守恒，Galilean 变换不变对应于质心的守恒等。

前面说过，了解方程对称或不变性是重要的，其中的一个基本原因是因为它可以提供可能的守恒律。而导出守恒律的基本依据是

Noether 原理：如果一个变分能保持一单参数变换簇不变，则其 Euler-Lagrangian 方程满足一个守恒律。

设 $\mathcal{L}=\mathcal{L}[\phi,g]$ 是场 ϕ 的一个积分作用。设 T_s 是时空 $\mathcal{M}$ 上的一个等距的单参数群，即 $(T_s)_*g=g$，则 $\mathcal{L}[(T_s)_*\phi,g]=\mathcal{L}[(T_s)_*\phi,(T_s)_*g]=\mathcal{L}[\phi,g]$。这样作用在映射 $\phi\to(T_s)_*\phi$ 下是保持的。由 Noether 原理我们应该能找到对应于 Euler-Lagrangian 方程的一个守恒律，可用生成 T_s 的向量场 X 导得这样的守恒律。

利用对称或守恒律，我们可以得到解在相应范数空间的估计。利用标尺度变换的不变性，我们可以预测初值函数空间的正则性与解的存在时间之间的关系。它们可以为我们解决问题所采取的方法提供参考依据。例如，我们欲建立在某对称下不变的初值函数集合中建立适定性，这就建议我们用在对称下不变的技巧和估计；利用对称可将解在适当的空间中规范化，如可使解集中到物理空间、时间或频率空间的特定位置如原点等。对于使得方程的标尺度平衡的变换，如果还能保持某特定的 Sobolev 空间范数不变，我们就称这样的 Sobolev 空间的正则性为**临界**正则。对于上面的非线性 Schrödinger 方程、波动方程的临界正则指标是 $s_c=n/2-2/(p-1)$。事实上，对应于 Schrödinger 方程的临界正则 Sobolev 范数是齐次范数，即 $\|u(0,x)\|_{\dot H^{s_c}(\mathbb{R}^n)}$；波动方程则是 $\|u(0,x)\|_{\dot H^{s_c}(\mathbb{R}^n)}+\|\partial_t u(0,x)\|_{\dot H^{s_c-1}(\mathbb{R}^n)}$。对于高于临界正则性的指标 $s>s_c$，我们称作是**次临界**的，而相反的 $s<s_c$ 称之为**超临界**的。对于次临界情形 $(s>s_c)$，人们希望 Cauchy 问题是适定的，至少局部是如此。这时解的存在时间和初值的大小之间往往存在一种某次幂的反比关系。这样，如果我们在某固定时间建立了小初值的局部适定性，我们就能得到大初值小时间的局部适定性的。对于超临界的 s，在 H^s 中方程一般是不适定的，即使是局部也是如此，对应于这种情形广义的弱解是无意义的。而对于临界情形 $s=s_c$，希望对于小初值问题有适定的整体弱解。这就是说次临界正则性的问题的解具有较好的性态。当然，不同的对称会有不同的临界正则性。

在研究中，我们对于临界正则空间与一些有特殊物理意义的守恒量所在空间相一致的情形更有兴趣。如能量空间 H^1，对于非线性波动方程保 Lorentz 不变、共形不变等的空间；对于 Schrödinger 方程保质量不变的 L^2 空间等。

注意到 Fourier 变换在物理空间与频率空间之间的伸缩变换建立了一个定量的联系，我们就可以利用标尺度平衡分析来了解解的初值之高频与低频在所考虑空间中随时间的演化关系，利用守恒律了解解在高频与低频处的大小控制关系。因此这意味着我们也可以利用这些不变性将方程依据守恒律（如能量）分为次临界（在细致标尺时强，在粗糙标尺时弱）、临界（标尺度变换不变）、超临界（在粗糙标尺时强，在细致标尺时弱）。可以说临界的守恒律提供了方程的线性部分与非线性部分在强度上大致是可以比较的关系，这两者之间的细致的关系可以反映出解的演化性态。通过标尺的改变来观察在这一过程中所导致的解关于某种量（如能量）的变化，从而预测解的奇性的发展。例如，我们考虑方程

$$\partial_t^2 u-\Delta u=\pm|u|^{p-1}u. \tag{1.3.1}$$

其能量可由

$$E(u)=\int\left\{\frac{1}{2}|\partial_t u(t,x)|^2+\frac{1}{2}|\nabla u(t,x)|^2\mp\frac{1}{p+1}|u(t,x)|^{p+1}\right\}\mathrm{d}x$$

给出。当方程 (1.3.1) 的右端取负号时，方程即为焦散型的，这时能量 $E(u)$ 总是正的。我们可以期望非线性项起的作用是放大线性方程的色散效果；而在相反的正号情形，能量可能成为负值，非线性的作用也与色散相向，它可以削弱甚至阻止色散作用。因此这时的情况就会很复杂，甚至会丧失线性方程解关于时间的衰减性质，如出现孤立子波等。

当 $n\geq 3, p=1+\frac{4}{n-2}$ 时，能量，即解在 H^1 空间范数下，在上面的标尺度平衡变换下是不变的。对应于这时的能量表达式中的非线性指数是 $p+1=\frac{2n}{n-2}$，它正好是 Sobolev 不等式的端点情形。

我们可以用此来刻画方程的非线性程度，给方程作出适当的分类，对 $p=1+\frac{4}{n-2}$，能量是标尺度平衡不变的，或说成是无量纲的。$p>1+\frac{4}{n-2}$ 能量有正量纲 (说明非线性强度已超出能量可控范围)，$n\leq 2$，或 $n\geq 3$，$p<1+\frac{4}{n-2}$ 能量有负量纲 (非线性强度较弱)，对应的问题分别称为能量临界、能量超临界和能量次临界。

对于超临界情形，解在高频处的守恒律弱。这样能量的守恒并不排除集中，这时即使能量小，非线性程度还是可以很高。在这种情形解很可能出现非常不稳定的现象，或出现湍流。对于这种情形人们期望用比能量更强的范数来附加小性，对这样的“小初值”解具整体正则性，而大初值解破裂。对于次临界的情形，守恒律在高频处比低频强，由于低频演化缓慢，希望解在短时间内有线性性态，而在长时间有非线性性态。所以在这种情形，解的局部存在性在次临界正则情形是容易证明的。如果能量是有界的，集中能被排除，因为在集中的过程中需要很多的能量，因此，我们就可以基于能量估计去证明适定性或解的正则性，人们可以希望解具有整体的正则性。对于临界情形，守恒律是标尺度平衡变换不变的，对一个固定能量的能值，高低频有等量的非线性。这样希望当能量小时，对所有时间解都呈现线性性态。集中要求一定量的能量，如果能量小，集中应该说可以排除，在这种情况，人们希望多数情形解具有正则性。就我们所考虑的焦散型波动方程 (1.3.1) 而言，在临界情形，用 Strichartz 估计可以说明对于大能量初值，只要势能不集中，解就会有正则性；只要势能衰减，解就会有良好的渐近性质。事实上，我们可以用 Morawetz 恒等式说明势能是不集中的且在无穷远处是衰减的。

利用初值的正则性空间 $H^s(\mathbb{R}^n)$，方程的标尺度变换不变的正则性空间 $H^{s_c}(\mathbb{R}^n)$，解的频率和解的演化性态之间的联系，人们猜测：若 $s_c<1$，则 Cauchy 问题有整体正则解，对于 $s_c=1$，在多数情形有整体正则解；而对 $s_c>1$，有“小初值”正则解，大初值解会破裂。

1.3.1 几个重要李群

在偏微分方程研究中，特别是在解的正则性研究中人们发现有几个李群是重要的，其实从方程对一些作用的不变性质的分析中可以看到这一点。为学习或应用方便我们先介绍几个重要李群。首先是正交群 $O(p,q)$，这里的 p,q 是惯性指标满足 $p+q=n$，

它是保持所给的非退化对称双线性形式不变的 $\mathbb{R}^n$ 的线性变换群。$p=0$ 对应于欧氏空间，简记为 $O(n)$；$p=1$ 对应 Minkowski 时空 $\mathbb{R}^{1+n}$。群 $O(1,n)$ 是 Lorentz 群：它是 Minkowski 空间 $\mathbb{R}^{1+n}$ 中保持度量 $\sum g_0^{jk}\mathrm{d}x_j\mathrm{d}x_k$ 不变的线性群。它由空间的旋转与时空的“推进”生成。其李代数（李群在原点的切空间）的生成元为角导数 Ω_{ij}，即

$$\Omega_{ij}=g_0^{ii}x_i\partial_j-g_0^{jj}x_j\partial_i,\ 0\le i<j\le n, \tag{1.3.2}$$

若取 $g_0^{jk}=\mathrm{diag}(1,-1,\cdots,-1)$ 是波动方程的达朗贝尔系数，这样，

$$\Omega_{ij}=x_j\partial_i-x_i\partial_j,\ 0<i<j\le n, \tag{1.3.3}$$

和

$$\Omega_{0j}=t\partial_j+x_j\partial_t\,,0<j\le n. \tag{1.3.4}$$

其中 Ω_{0j} 对应于推进，其他对应于空间旋转。一般情形，设 Q 是对角阵，前 p 个对角元是 -1，剩下的是 $+1$. 则 $O(p,q)=\{L\in\mathrm{Mat}(n,\mathbb{R})|L^{\mathrm{T}}QL=Q\}$。对 $L\in O(p,q),\det(L)=\pm1$，用 $SQ(p,q)$ 记如下的特殊正交群 $SQ(p,q)=\{L\in O(p,q)|\det L=1\}$。$O(p,q)$ 和 $SQ(p,q)$ 的李代数

$$\mathcal{SQ}(p,q)=\{A\in\mathrm{Mat}(n,\mathbb{R})|AQ+QA^{\mathrm{T}}=0\},$$

其维数为 $n(n-1)/2$. $\mathcal{SQ}(p,q)$ 上的李括号是通常的李括号，即 $[A,B]=AB-BA$。且有 Jacobi 恒等式

$$[A,[B,C]]+[C,[A,B]]+[B,[C,A]]=0$$

成立。酉群 $U(p,q)=\{U\in\mathrm{Mat}(n,\mathbb{C})|U^*QU=Q\}$ 是正交群在复空间 $\mathbb{C}^n$ 的对应物，其维数是 n^2。相应的特殊正交群以及他们的李代数分别为 $SU(p,q)=\{U\in U(p,q)|\det U=1\}$，其维数是 n^2-1。$\mathcal{U}(p,q)=\{A\in\mathrm{Mat}(n,\mathbb{C})|AQ+QA^*=0\}$，和 $\mathcal{SU}(p,q)=\{A\in\mathcal{U}(p,q)|\mathrm{tr}_QA=0\}$，其中 $\mathrm{tr}_Q=Q^{ij}A_{ij}$。

Poincaré 群也称非齐次 Lorentz 群，它是由 Lorentz 群的元素和平移变换生成。对应的李代数由 Lorentz 群的李代数生成元和 $\mathbb{R}^{1+n}$ 中平移变换的向量场

$$\partial_i,\ 0\le i\le m, \tag{1.3.5}$$

生成，其中 $\partial_j=\partial/\partial x_j$。

一个微分同胚 $\Phi:\mathcal{U}\subset\mathcal{M}\to\mathcal{M}$ 如果满足 $\Phi^*g=\Omega^2g$，则称其是共形等距的。如果 $\Omega=1$，就称之为等距的。生成单参数的等距和共形等距群的向量场分别称为 Killing 向量场和共形 Killing 向量场。

设 K 是这样一个向量场，Φ_s 是对应的单参数群。由于 $(\Phi_s)_*$ 是共形等距的，我们立刻有 L_Kg 必须成比例于 g。此外，如果 K 是 Killing 的，$L_Kg=0$。如果 K 是 Killing 向量场，我们能选取局部坐标 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 使得 K 是一个坐标导数，即 $K=\partial_0$。这样我们立刻就有相应于这样的局部坐标 g 与 x_0 无关。对于 Minkowski 时空 $\mathbb{R}^{1+n}$ 线性无关的 Killing 向量场的个数不会超过 $(n+1)(n+2)/2$。

所有平移、Lorentz 旋转、伸缩以及反射变换全体生成的群称为**共形群**。用 X 记时空点，给定一个向量 a，则平移变换 T_a 为 $X \to X+a$; 给定任何 $\Lambda \in O(1,n)$, Lorentz 旋转为 $X \to \Lambda X$。如果 $n \neq 1$，共形变换可由除平移、Lorentz 变换外还有伸缩 $X \longrightarrow \lambda X$，及反射变换 VT_aV 生成，其中 $V(X) = X(X\cdot X)^{-1}$，其中的 $(X,X) = \delta_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta \neq 0$，这里的 $\delta_{\alpha,\beta}$ 为 Minkowski 度量。

对应于伸缩变换 $x \to \lambda x$ 有生成元 $L_0 = t\partial_t + x\cdot\nabla$。

反射变换 VT_aV 的生成元 $C_\alpha = 2x_\alpha(x^\gamma\partial_\gamma) - x^\beta x_\beta\partial_\alpha$。它可由 V_* 作用到向量场 ∂_α 来得到，即 $C_\alpha = V_*(\partial_\alpha)$。

共形变换群的李代数是由向量场 ∂_α, $\Omega_{\alpha\beta}$, L_0, 和 C_α 生成。

下面我们将

$$\partial_0,\cdots,\partial_n,L_0,\Omega_{01},\cdots,\Omega_{n-1},C_\alpha$$

分别由 $\Gamma_i, i=0,\cdots,(n+1)(n+4)/2$ 来记。

$$\Gamma^\alpha = \Gamma_1^{\alpha_1}\cdots\Gamma_m^{\alpha_m},$$

我们称向量场 L_0, $\Omega_{\alpha,\beta}$ 为齐次向量场，这是由于它们的系数是一次齐次的. 注意到对于这些向量场，我们有交换关系

$$[\Gamma_i,\Gamma_j] = \sum C_{ijk}\Gamma_k \tag{1.3.6}$$

对某些固定的常数成立，其中的和仅包含齐次向量场。这样，两个齐次向量场的交换子是齐次向量场的线性组合。如果我们计算 ∂_j 和齐次向量场的交换关系，就得到一个平移变换向量场:

$$[\Gamma_k,\partial_j] = \sum_{i=0}^{n} a_{ijk}\partial_i, \tag{1.3.7}$$

这是由于

$$[\partial_k,L_0] = \partial_k, [\partial_k,\Omega_{0j}] = \delta_{0k}\partial_j + \delta_{jk}\partial_0, \tag{1.3.8}$$

和

$$[\partial_k,\Omega_{ij}] = \delta_{jk}\partial_i - \delta_{ik}\partial_j,\ 0\le k\le n, 1\le i,j\le n.$$

对于其他向量场我们有 $[C_\alpha,C_\beta]=0$, $[C_\alpha,L_0] = -C_\alpha$, $[\Omega_{\alpha\beta},C_\gamma] = \delta_{\alpha\gamma}C_\beta - \delta_{\beta\gamma}C_\alpha$ 以及

$$[\Omega_{\alpha\beta},\Omega_{\gamma\delta}] = \delta_{\alpha\gamma}\Omega_{\beta\delta} - \delta_{\beta\gamma}\Omega_{\alpha\delta} + \delta_{\beta\delta}\Omega_{\alpha\gamma} - \delta_{\alpha\delta}\Omega_{\beta\gamma}.$$

容易验证对于达朗贝尔算子 $\Box = \partial_t^2 - \Delta$，我们有 $[\Box,\partial_\mu]=0$, $[\Box,\Omega_{\mu\nu}]=0$, $[\Box,L_0] = 2\Box$, $[\Box,C_\mu] = 4x_\mu\Box$.

另一事实对我们也是有用的，即考虑在一个给定的点 $(t,x)\in\mathbb{R}^{1+n}\setminus 0$ 齐次向量场的张量。具体地，注意到如果 $t^2\neq|x|^2$，即如果 (t,x) 不在光锥上，则这些向量场张成所有 (t,x) 上的切空间。另一方面，如果 $t^2=|x|^2$，它们仅仅张成光锥上的切空间，由 (1.3.8) 这丢失的法向分量仅一阶为 0。

Laplace 算子可以在球坐标下写成

$$\Delta = \partial_r^2 + \frac{n-1}{r}\partial_r + \frac{1}{r^2}\sum_{j<k}\Omega_{jk}^2,$$

其中 $r = |x|, \partial_r = (\frac{x}{r}) \cdot \nabla$ 是径向导数，角导数的平方满足

$$|\nabla u|^2 - u_r^2 = \frac{1}{r^2}\sum_{j<k}(\Omega_{jk}u)^2. \tag{1.3.9}$$

1.3.2 模型方程的守恒律与一些不变性质

这一节我们将对方程的不变性作一些具体的刻画，如 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ 中的 Schrödinger 方程 $i\partial_t u + \Delta u = 0$, 除了前面的标尺度变换不变外，容易验证在 Galilean 变换

$$\tilde{u}(t,x) = \mathrm{e}^{i\frac{1}{2}x\cdot v}\mathrm{e}^{i\frac{1}{4}t|v|^2}u(t, x - vt), v \in \mathbb{R}^n,$$

下是不变的，即 u 是方程的解当且仅当 $\tilde{u}$ 是方程的解。

对于非线性波动方程 NLW, 它可以形式地看成是 Lagrangian

$$\mathcal{L}(u) = \int\int\Big\{-\frac{1}{2}|\partial_t u|^2 + \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + F(u)\Big\}\mathrm{d}x\mathrm{d}t \tag{1.3.10}$$

的 Euler-Lagrangian 方程，其中 F 是 f 的原函数，且 $F(0) = 0$。极小泛函 $\mathcal{L}$ 在 Poincaré群作用下是不变的。注意到关于时间平移变换的生成元为 $\frac{\partial}{\partial t}$，故在 (NLW) 两边同乘 $\partial_t u$ 得散度形式

$$\partial_t e - \sum_{j=1}^n \partial_j p_j = 0, \tag{1.3.11}$$

其中 $e = \frac{1}{2}(\partial_t u)^2 + \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + F(u)$, $p_j = (\partial_t u)(\partial_j u)$。

- 如果适当选取初值，使得当 $|x| \to \infty$ 时为 0, 则 (1.3.11) 意味着能量守恒

$$E(u) = \int\Big(\frac{1}{2}(\partial_t u)^2 + \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + F(u)\Big)\mathrm{d}x = 常数. \tag{1.3.12}$$

- 如果 $F \geqslant 0$, 由 (1.3.11) 还可以得到有限传播速度性质。事实上，我们在以 T 为顶，B 为底，K 为侧面的实锥台 $t_0 \geqslant t_2 \geqslant t \geqslant t_0 - |x - x_0| \geqslant t_1$ 上积分得

$$\int_T e\mathrm{d}x + \frac{1}{\sqrt{2}}\int_K (e - \frac{x}{r}\cdot p)\mathrm{d}K = \int_B e\mathrm{d}x, \tag{1.3.13}$$

其中 $r = |x|$, $\mathrm{d}K$ 是锥面上的测度。注意到 $|p| \leqslant e$, 上式左边的两被积函数均非负，因此 T 中的能量小于等于 B 中的能量，即传播速度 $\leqslant 1$。

- 注意到空间平移变换的生成元是 ∂_x, 由此可以导致动量 $\int p_k \mathrm{d}x$ 守恒，

$$\partial_t p_k - \sum_j \partial_j(\partial_k u \partial_j u) + \partial_k(e - (\partial_t u)^2) = 0. \tag{1.3.14}$$

- 将 x_j 或 t 乘方程 (1.3.11) 和 (1.3.14)，重排各项及加减后可得角动量守恒

$$\int (x_k\partial_j u - x_j\partial_k u)(\partial_t u)\mathrm{d}x = \text{常数} \tag{1.3.15}$$

和

$$\int (x_k e + t\partial_k u\partial_t u)\mathrm{d}x = \text{常数}. \tag{1.3.16}$$

如果取 $f(u) = \pm|u|^{p-1}u$, 在 $p = 1 + 4/(n-1)$ 时的特殊情形，它在更大的共形变换群下是不变的。对应于伸缩变换 $u(t,x) \longmapsto \lambda^{(n-1)/2}u(\lambda t, \lambda x), \lambda = 1+\varepsilon$, 有生成元

$$L_0 + \frac{n-1}{2},$$

其中 $L_0 = t\partial_t + x\cdot\nabla = t\partial_t + r\partial_r$。

伸缩 Morawetz 恒等式是保持伸缩变换不变的产物，它可以用 Noether 原理导得。我们以 $n=3$ 为例来说明这一过程。为此注意到方程的 Lagrangian 是

$$L(u,u') = \frac{1}{2}(|u_t|^2 - \sum_{j=1}^{3}|u_{x_j}|^2) - F(u).$$

对于满足方程的 u，我们有：对任何 $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\int L(u+\varepsilon\psi, (u+\varepsilon\psi)')\mathrm{d}t\mathrm{d}x\bigg|_{\varepsilon=0} = 0.$$

这样，u 必须满足与我们的方程相应的 Euler-Lagrangian 方程，

$$\frac{\partial L}{\partial u}(u,u') - \sum_{j=0}^{3}\partial_j[\frac{\partial L}{\partial u'}(u,u')] = 0.$$

伸缩变换 $u_\lambda = \lambda u(\lambda t, \lambda x)$ 是 u 的一个单参数 C^1 变换。则

$$\partial_\lambda L(u_\lambda, u'_\lambda) = \frac{\partial L}{\partial u}(u_\lambda, u'_\lambda)\partial_\lambda u_\lambda + \sum_{j=0}^{3}\frac{\partial L}{\partial u_{x_j}}(u_\lambda, u'_\lambda)\partial_j\partial_\lambda u_\lambda.$$

注意到

$$\partial_\lambda u|_{\lambda=1} = u + \sum_{j=0}^{3}x_j\partial_j u,$$

我们能用 Euler-Lagrangian 方程得到

$$\partial_\lambda L(u_\lambda, u'_\lambda)|_{\lambda=1} = \sum_{j=0}^{3}\partial_j[\frac{\partial L}{\partial u_{x_j}}(u,u')\partial_\lambda u], \tag{1.3.17}$$

其中

$$L(u_\lambda, u'_\lambda) = \lambda^4 \cdot (L(u,u'))(\lambda t, \lambda x) + \lambda^4 F(u(\lambda t, \lambda x)) - F(u_\lambda(t,x)).$$

因此，

$$\partial_\lambda L(u_\lambda, u'_\lambda)|_{\lambda=1} = \sum_{j=0}^{3} x_j \partial_j L(u,u') + 4L(u,u') + 4F(u) - uf(u),$$

以及

$$\sum_{j=0}^{3} \partial_j [\frac{\partial L}{\partial u_{x_j}}(u,u')(u + \sum_{j=0}^{3} x_j \partial_j u) - x_j L(u,u')] = 4F(u) - uf(u).$$

由 Lagrangian 的具体形式，我们可得散度形式的方程

$$\mathrm{div}_{t,x}(tQ + \partial_t u u, -tP) = 4F(u) - uf(u), \tag{1.3.18}$$

其中

$$Q = \frac{1}{2}|u'|^2 + F(u) + t^{-1}\partial_t u x \cdot \nabla_x u,$$

$$P = (\frac{1}{2}|\partial_t u|^2 - \frac{1}{2}|\nabla_x u|^2 - F(u))x/t + (t^{-1}u + \partial_t u + t^{-1}x \cdot \nabla_x u)\nabla_x u.$$

通过计算同样可得一般维数情形成立如下的等式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int \left\{te + ru_r u_t + \frac{n-1}{2}uu_t\right\}\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int H(u)\mathrm{d}x, \tag{1.3.19}$$

其中 $H(u) = (n-1)uf(u) - 2(n+1)F(u)$。这样，如果 $F=0$，或 $H(u) = 0 \Leftrightarrow f(u) = cu^p, p = 1 + \frac{4}{n-1}$ 可得守恒律。即方程

$$\Box u = cu^{1+\frac{4}{n-1}}, \qquad \text{其中 } c \text{ 是任意常数},$$

是共形不变的。特别，在 Kelvin 反射变换

$$u(t,x) \longmapsto (t^2 - |x|^2)^{-(n-1)/2} u(\frac{t}{t^2 - |x|^2}, \frac{x}{t^2 - |x|^2})$$

下是不变的。

我们知道算子 L_0 并不能与 $\Box$ 交换，这时的伸缩恒等式可写成

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\int \left\{\frac{1}{2}(t^2 - r^2)e + \frac{n-1}{4}u^2\right\}\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int H(u)\mathrm{d}x. \tag{1.3.20}$$

注 1.3.1 恒等式 (1.3.19) 也可以用变换 u_λ 的生成元 $t\partial_t u + r\partial_r u + \frac{n-1}{2}u$ 乘方程两边直接得到。

通过适当的标尺度平衡, 反射变换 VT_aV 的生成元可写成

$$\mathcal{C}_0=(t^2+r^2)\partial_t+2rt\partial_r+(n-1)t$$

和 $\mathcal{C}_k=tx_k\partial_t+\frac{1}{2}(t^2-r^2)\partial_k+x_kx\cdot\nabla+\frac{1}{2}(n-1)x_k,\quad (k=1,\cdots,n).$

由 $\mathcal{C}_0u$ 乘 (NLW) 导得反射恒等式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\mathcal{C}_e\mathrm{d}x=-t\int H(u)\mathrm{d}x,\tag{1.3.21}$$

其中共形能量密度是

$$\mathcal{C}_e=(t^2+r^2)e+2rtu_ru_t+(n-1)tuu_t-\frac{1}{2}(n-1)u^2.\tag{1.3.22}$$

或 $$\mathcal{C}_e\cong\frac{1}{4}(t+r)^2(u_t+u_r+\frac{n-1}{2r}u)^2+\frac{1}{4}(t-r)^2(u_t-u_r-\frac{n-1}{2r}u)^2$$
$$+\frac{1}{2}(t^2+r^2)(|\nabla u|^2-u_r^2)+\frac{(n-1)(n-3)}{4r^2}u^2+(t^2+r^2)F(u),\tag{1.3.23}$$

这里 $\cong$ 意指差一个空向散度项。

注意到

$$\sum_j|\Gamma_ju|^2=|xu_t+t\nabla u|^2=r^2u_t^2+t^2|\nabla u|^2+2tru_tu_r$$

和

$$\begin{aligned}|L_0u+(n-1)u|^2&=|tu_t+ru_r+(n-1)u|^2\\&\cong t^2u_t^2+r^2u_r^2+2tru_tu_r+2(n-1)tu_tu-(n-1)u^2.\end{aligned}$$

我们可将共形能量密度写成

$$\mathcal{C}_e\cong\frac{1}{2}|L_0u+(n-1)u|^2+\frac{1}{2}\sum_j|\Gamma_ju|^2+\frac{1}{2}\sum_{j<k}|\Gamma_{jk}u|^2+(t^2+r^2)F(u).\tag{1.3.24}$$

如果 $F\geqslant 0,\quad H\geqslant 0,\quad n\neq 2$, 则

$$\int F(u)\mathrm{d}x,\quad\int(|\nabla u|^2-u_r^2)\mathrm{d}x,\quad\int(u_t+u_r+\frac{n-1}{2r}u)^2\mathrm{d}x$$

当 $t\longrightarrow+\infty$ 时有 $O(t^{-2})$。由 (1.3.21), (1.3.23) 可知本质上由 $(u_t-u_r)^2$ 承载所有的能量, 这样能量近似地可认为是沿特征迁移。我们还可以知道在一固定的球 $|x|<R$ 中, e 的积分, 即局部能量以 $O(t^{-2})$ 的速度趋于 0。

有些变换虽然并不保持波方程不变, 但很有用。如标尺度平衡 $u(x,t)\longmapsto\lambda u(x,t)$, $\lambda=1+\varepsilon$, 有生成元 u。用 u 乘 (NLW) 得恒等式

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\frac{1}{2}\int u^2\mathrm{d}x=\int\{u_t^2-|\nabla u|^2-uf(u)\}\mathrm{d}x.$$

空向伸缩 $u(x,t) \longmapsto u(t,\lambda x)$ 有生成元 $x \cdot \nabla = r\partial_r$。用 ru_r 乘得

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\int r^2 e\mathrm{d}x = -n\int\Big\{-\frac{1}{2}u_t^2 + (\frac{1}{2}-\frac{1}{n})|\nabla u|^2 + F(u)\Big\}\mathrm{d}x.$$

对于 $n \geqslant 3$，用 $u_r + \frac{n-1}{2r}u$ 乘得 Morawetz 径向恒等式

$$\begin{aligned} 0 \;=\; & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int u_t\Big(u_r + \frac{n-1}{2r}u\Big)\mathrm{d}x + \int(|\nabla u|^2 - u_r^2)\frac{\mathrm{d}x}{r} \\ & + \frac{(n-1)(n-3)}{4}\int u^2\frac{\mathrm{d}x}{r^3} + \frac{n-1}{2}\int(uf(u) - 2F(u))\frac{\mathrm{d}x}{r}\;, \end{aligned}$$

当 $n=3$ 时在右端项需要附加 $2\pi u^2(t,0)$。

对于非线性 $f(u) = g(|u|^2)u$, $G' = g$, $G(0) = 0$, $F(u) = \frac{1}{2}G(|u|^2)$ 的 Schrödinger 方程 NLS，它的 Lagrangian 是

$$\mathcal{L}(u) = \int\int\Big\{\frac{1}{2}\mathrm{Im}\bar{u}_t u + \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + F(u)\Big\}\mathrm{d}x\mathrm{d}t.$$

对于变换 $u \longmapsto \mathrm{e}^{i\varepsilon}u$ 有生成元 iu。这样用 $\overline{iu}$ 乘方程算积分得电荷守恒

$$\int |u|^2 dx = \text{常数}.$$

利用关于时间平移不变性可得能量守恒

$$E(u) = \int\Big\{\frac{1}{2}|\nabla u|^2 + F(u)\Big\}\mathrm{d}x = \text{常数}. \tag{1.3.25}$$

对于伸缩变换 $u(t,x) \longmapsto \lambda^{n/2}u(\lambda^2 t,\lambda x)$ 有生成元 $\mathcal{D}u = 2tu_t + ru_r + \frac{n}{2}u$，这样可得恒等式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\Big\{\frac{1}{2}\mathrm{Im}ru_r\bar{u} + t|\nabla u|^2 + 2tF(u)\Big\}\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int K(u)\mathrm{d}x, \tag{1.3.26}$$

其中 $K(u) = nf(u)\bar{u} - 2(n+2)F(u)$。

对于 (NLS) 方程，Ginibre 和 Velo 发现了由平移和拟反射变换

$$u(x,t) \longmapsto (it)^{-\frac{n}{2}}\mathrm{e}^{ix^2/4t}\bar{u}(\frac{1}{t},\frac{x}{t})$$

组合生成的拟共形变换。注意到当 $F(u) = 0$ 时上面的拟反射变换保持 $\mathcal{L}(u)$ 不变，所以可得拟共形恒等式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\Big\{\frac{1}{2}|xu - 2it\nabla u|^2 + 4t^2F(u)\Big\}\mathrm{d}x = -2t\int K(u)\mathrm{d}x. \tag{1.3.27}$$

如果 $K \equiv 0$，则取 $f(u) = c|u|^{p-1}u$, $p = 1 + \frac{4}{n}$, (1.3.26), (1.3.27) 即满足。
如果 $K \geqslant 0$, $F \geqslant 0$，由 (1.3.27) 得 $\int F(u)\mathrm{d}x = O(t^{-2})$。我们可得一个正则性性质：

如果初值 $xu \in L^2$, 则 $xu - 2it\nabla u \in L^2$ 对 $t \geqslant 0$ 成立, 即增得一阶导数。

以上的讨论可以看出, 考虑一族线性算子 $\{\Gamma(t)\}$ 与线性方程

$$\partial_t u = Au$$

的可交换性往往是重要的, 其中 A 是一个固定的线性算子。

为寻找这样的线性算子族, 即要求有

$$(\partial_t - A)\Gamma = \Gamma(\partial_t - A)$$

或

$$\Gamma\partial_t + \Gamma_t - A\Gamma = \Gamma\partial_t - \Gamma A,$$

即

$$\Gamma_t = [A, \Gamma]$$

注意到

$$\partial_t[\mathrm{e}^{-tA}\Gamma\mathrm{e}^{tA}] = \mathrm{e}^{-tA}(-A\Gamma + \Gamma_t + \Gamma A)\mathrm{e}^{tA} = 0,$$

我们有 $\Gamma(t)\mathrm{e}^{tA} = \mathrm{e}^{tA}\Gamma(0)$。微分后可得 $\Gamma_t = \mathrm{e}^{tA}[A, \Gamma(0)]\mathrm{e}^{-tA}$。如果 $[A, \Gamma(0)]$ 与 A 可交换, 也与 e^{itA}, 这就有 $\Gamma_t = [A, \Gamma(0)]$.

因此, 如果 $[A, [A, \Gamma(0)]] = 0$, 则若 u 是解, 则 $\Gamma(0)u(t) + t[A, [A, \Gamma(0)]]u(t)$ 也是解。

例 1.3.1 取 $A = -i\Delta, \Gamma(0) = x_j$, 则 $[A, \Gamma(0)] = -2i\partial_j$, 这样

$$\Gamma(t) = \Gamma(0) + t[A, \Gamma(0)] = x_j - 2it\partial_j.$$

例 1.3.2 取 $A = -\partial^3, \Gamma(0) = x$, 则 $[A, \Gamma(0)] = -3\partial^2, \Gamma(t) = x - 3t\partial^2$。

§1.4 问题及方法

我们所关心的基本问题是解的适定性、正则性或破裂解的结构以及解的长时间性态等。在经典理论中, 研究方法往往是利用能量不等式和 Sobolev 不等式, 对非线性问题的正则性要求比较高。但在过去的二十多年中, 非线性波动方程的研究课题随以下几个基本技术的发展发生了改变: 处理物理空间中几何结构的几何技巧, Littlewood - Paley 分解的系统应用及仿微分算子的引入, 以及 Fourier 空间技术, 如 Strichartz 型不等式、双线性估计等。这促使人们可以利用这些工具细致地研究在低正则框架下的相关问题。对于我们要探讨的基本问题可以分为:

1.4.1　Cauchy 问题的适定性

我们所考虑的 NLW 和 NLS 的共同点是可以将它们写成

$$\frac{\partial u}{\partial t}=A_0u+N(u) \tag{1.4.1}$$

的形式，其中 $t\longmapsto u(t)$ 是一个取值于某函数空间（x 的函数）的函数，A_0 是一个线性算子，N 是非线性算子。

事实上，对于 NLS，我们可取 $A_0=-i\Delta, N(u)=-f(u)$，对 NLW 我们可令 $v=u_t$，

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \Delta & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 \\ -f(u) \end{pmatrix}.$$

为对我们所关心的问题有一个普适性的提法，我们不妨考虑以下的抽象偏微分方程

$$\begin{cases} \partial_t u=Lu+f(u), \\ u|_{t=0}=u_0, \end{cases} \tag{1.4.2}$$

其中 L 是线性偏微分算子。初始函数 u_0 属于某个函数空间 X，我们要寻找问题 (1.4.2) 在一个合适空间 $\chi(I)$ 中的解 u，其中 $I=[0,T]$ 或 $I=[-T,T], T>0$，例如 $\chi(I)$ 可取为从 I 到 X 的连续函数空间 $C(I,X)$。对于 (1.4.2) 人们可考虑如下问题：

解关于时间的局部存在性　证明存在一个 $T>0$，使得解 $u\in\chi(I)$。

解的唯一性　在所有包含 I 的区间中，在 $\chi(I)$ 中至多存在一个解。

解关于初值的连续依赖性　证明在适当的意义下算子 $u_0\longmapsto u$ 是连续的。

如果上面的三个性质满足，称 Cauchy 问题是**局部适定**的。

解关于时间的整体存在性　证明解在 $\chi(\mathbb{R})$ 中。

如果上述的四条性质满足，我们说 (1.4.2) 是**整体适定**的。

注 1.4.1　唯一性是解本身关于所给初始条件的连续性，如果初值作小的改变量解也仅作小的改变。特别对于相同的初值，解也相同。由于人们可以在不同的框架下讨论存在性、唯一性以及连续依赖性等问题，所以这就导致了有各种不同的适定性的概念。

解的正则性　设 $u_0\in X$，u 是 (1.4.2) 在一个合适的空间 $\chi(I)$，如 $C(I,X)$ 中的解，如果我们知道 u_0 的正则性更好，如 $u_0\in Y\subsetneq X$. 我们要证明解的正则性是传播的，如 $u\in C(I,\mathcal{Y})$，其中 $\mathcal{Y}$ 是与 Y 有自然联系的更为正则的空间。

解在有限时间内的破裂　这是与整体存在性相反的情形。人们证明存在 $T*<\infty$ 使得 (1.4.2) 的解当 $t\nearrow T*$ 时在一定的意义下破裂，如 $\|u(t)\|_X\to\infty$ 等。在这种情形人们就会关心解的奇性的性质、结构或剖面以及其产生机理、时间和位置等问题。

注 1.4.2　对于上述所研究的每个问题，我们能讨论小初值的情形，小初值能延缓非线性的影响。我们将会看到如下类型的命题：存在 $\epsilon>0$，使得当 $\|u_0\|_X<\epsilon$ 时上述的一个或另一个性质成立。

2. **解关于时间的渐近性态，散射理论**

当 Cauchy 问题 (1.4.2) 是整体适定时，我们可以研究解在 $t\to\pm\infty$ 时的性态。这样的问题的一个研究方法是：人们试图用一个更简单的问题的渐近性态来刻画所研

究的解的渐近性态，这种更简单的问题的一个明显的代表是对应的线性方程

$$\partial_t u = Lu. \tag{1.4.3}$$

因此，比较 (1.4.2) 和 (1.4.3) 的解的渐近性态，这就导致了如下两个问题：

1. 给定 (1.4.3) 的一个解 v_+, 其初始条件 $v_+(0) = u_+$, 是否存在 (1.4.2) 的一个解 u, 当 $t \to +\infty$ 时，在一定的意义下，以 $u(0) = u_0$ 为初值解渐近于 v_+? 例如在如下意义下当 $t \longrightarrow +\infty$ 时，

$$\|u(t) - v_+(t)\|_X \longrightarrow 0.$$

对于满足上述性质的 u_+ 的集合，我们可以定义波算子 Ω_+, 使得 $\Omega_+ : u_+ \to u_0$. 对于 $t \to -\infty$ 的情形我们可以同样的定义 $\Omega_- : u_- \to u_0$。

2. 给定 (1.4.2) 的一个解 u, 是否存在 (1.4.3) 的一个解 $v_\pm$ 使得当 $t \to \pm\infty$ 时分别与 u 的渐近性态相同？如果对于所有的 u_0 ($\in X$) 都有这样的性质我们称之为 (在 X 中) 渐近完备。这是一个非常强的性质，仅在一些特殊的情形知道。在这种情形，就没有孤立波存在。如果是这样，我们就可以用 (1.4.3) 的解的渐近性态来对 (1.4.2) 的解的渐近性态做完全的分类。

本书中将不涉及这一部分的内容，有兴趣的读者可参考相关的文献和书籍。

1.4.2 两个常用的研究方法

1. **压缩映射原理** 考虑方程 (1.4.2), 对于小振幅问题，我们可以将它看成是对应的线性系统的一个扰动或扰动，则非线性项就可以看成是一个误差项。解决该问题的一个有效方法是通过对应线性方程的基本解将其转化成与之等价的一个积分方程。这样，我们将有更多的办法在所考虑的函数空间中作出所需的各种估计。也可以用泛函的方法来解决问题。为此，设方程 (1.4.2) 中的 L 在一个 Hilbert 空间 H(如 L^2) 中是斜自共轭算子 ($L = -L^*$) 情形。在一定的条件下我们可以定义一个单参数群 $U(t) = \exp tL$, 称之为自由群，则我们可以由下面的积分方程

$$u(t) = U(t)u_0 + \int_0^t U(t-t')f(u(t'))\mathrm{d}t'$$

来代替 Cauchy 问题 (1.4.2)。这就将原问题转化为一个算子的不动点问题。上式的第一项是对应齐次方程的解，而第二项则是非齐次方程满足零初始条件的解。后一项所对应的算子可以看成是 Duhamel 算子。设 $\mathcal{L}$ 是一个映给定函数 u 到 Cauchy 问题 (1.4.2) 解的算子，满足

$$(\partial_t - L)(\mathcal{L}u) = f(u), \quad u(0) = u_0.$$

或

$$\mathcal{L} : u \longmapsto u_{lin} + (\partial_t - L)^{-1} f(u).$$

显然，$\mathcal{L}$ 的不动点就是问题的解。

说明这样的映照在适当的拓扑之下不仅是连续的，而且是从某完备度量空间（通常是用 Banach 空间的闭球）到自身的一个压缩映照或 Lipschitz 常数严格小于 1 的 Lip 映照。不动点的存在性就来自于压缩映照原理。这样的方法的一个副产品是可以自动得到不动点的唯一性以及对应于线性解的稳定性和解关于初始条件的连续依赖性，至少在所考虑的度量空间是如此。

在实际的操作中，人们常取定义在某带形时空区域 $[0,T]\times\mathbb{R}^n$ 中满足一定条件的函数构成的 Banach 空间 X 来存放解 u, 取这样的元素 u 在非线性映照 f 下的像所在的 Banach 空间为 Y。如果我们定义完备的度量空间 X 中的一个闭球，则在对初始条件的适当的要求下，我们可通过应用线性估计

$$\|(\partial_t - L)^{-1}f\|_X \le C_0\|f\|_Y,$$

非线性估计

$$\|f(u)\|_Y \le C_1\|u\|_X$$

以及

$$\|f(u)-f(v)\|_Y \le C_1\|u-v\|_X,$$

容易证实这样的映照 $\mathcal{L}$ 在上述闭球中有唯一的不动点。为使映照具有压缩性就得要求其中的常数 C_0, C_1 的乘积小，如 $C_0C_1 < 1/2$ 等。这样的小性常常来自于初值的小性，时间区间即 T 的小性，或这两者的组合等。

获取这样的估计的基本出发点是基于方程的不变性质。经典方法往往是利用能量不等式以及 Sobolev 不等式。这样解的存在区间就依赖于高正则的初始范数 $\|u_0\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}$ 而不是能量自身这样低的范数。这对我们考虑解的长时间性态带来困难，因为这样高的正则性往往很难得到控制。为减低正则性的要求，对于发展型方程人们就利用能捕捉更多的色散性效果的 Strichartz 估计来取代 Sobolev 不等式。例如对于波动方程在经典方法中我们往往要求估计形如 $\int_0^t \|\partial u\|_{L_x^\infty}\mathrm{d}s$ 这样的量。用 Sobolev 不等式 $\|\partial u\|_{L^\infty} \le C\|u\|_{H^s}$, $s > \frac{n}{2}+1$, 允许我们得到对小的 t, 上述不等式的右端可由初值等项的 H^s 来估计。但这样的量能在 Strichartz 估计 $\|\partial u\|_{L_t^2L_x^\infty([0,T]\times\mathbb{R}^n)} \le C\|u[0]\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}$, $s > \frac{n+1}{2}$, 的帮助下控制得更好，可导致 $\frac{1}{2}$ 阶导数的争得。这就导致了一个自然的问题，初值函数的正则性是否还可以降低？使得问题的解具有存在唯一性的最低 Sobolev 正则性是什么？这实际上导致了近二十多年来研究低正则问题的热潮。当然，研究低正则性问题不仅仅是为回答上面的问题，在研究解的奇性估计时也许要好的低正则性理论；方程的一些重要结构特征如 Hamiltonian 量、辛形式、动量等都与低正则的 Sobolev 空间相联系，为了利用这些重要的特征也要求有好的低正则理论；如果有较好的低正则框架，将局部解延拓到整体则会比高正则情形更容易，特别是如果能在与守恒量相适应的空间或标尺度变换不变的空间中研究更是如此。

在非线性色散型方程或波动方程的研究中，如果模型方程中的非线性项不含未知函数的导数，利用 Strichartz 估计就可以得到满意的理论。然而，对于包含导数的方程，要建立由解所在函数空间的范数控制非线性函数所在空间范数的估计会有困难，因为在这种情形非线性空间的正则性要比解空间的正则性要低一阶导数。要想从 Duhamel 算子“恢复”这阶导数的损失，仅由 Strichartz 估计一般来说是不可能的。为此得引入更细致的函数空间，或技术以更有效地获取光滑性效果。一个非常有用的

工具是 Fourier 限制范数空间 $X^{s,b}$ 的发展。这样的空间对色散和波动方程所处的地位与 Sobolev 空间对椭圆型方程所处的地位是一样的。s 和 b 分别度量解的“椭圆”和“色散”正则性，这样的空间完全能捕捉 Duhamel 算子的正则性效果。但这样的空间也只适合于次临界的情形，对于临界的情形它也不适用。问题与 Sovolev 空间嵌入到 L^∞ 时在端点失效的情形相似。不过有结果表明可以用 Besov 空间等加以改造解决这一困难。

在扰动方法的执行过程中可知，这种方法似乎并不能反映非线性的符号所产生的效果。这说明这样的方法在超临界聚焦型非线性方程情形是失效的。

我们知道在处理长时间、大初值问题时扰动方法就不再适用，但可以与非扰动方法，如守恒律、单调性公式，方程的代数变换等结合起来使用。一个解的整体控制常常可以通过用扰动技巧和非扰动手段结合起来。扰动理论可以保证解在某个积分有界的前提下有良好的性态，而非扰动理论可以保证这样的解在仍有良好的性态的前提下的积分控制的继续有效性。所以它们通力合作就能取得更好的效果。

2. **紧性方法** 所谓的紧性方法的基本原则是我们用不同的逼近方法（如用各种迭代方法、将方程正则化的方法、粘性方法、离散化方法等）来构造所给问题的一族逼近解，利用方程的一些守恒律来获得解的先验估计，以证明所构造的解在一个固定的紧集中，然后利用泛函分析中的紧性结论（如 Ascoli 引理，弱紧性定理等）抽取一个收敛或弱收敛的子列得到一个极限。我们知道在弱收敛意义下的连续性是不能得到保持的，但可证明这样的弱极限在某种意义下是强收敛的且极限函数在一定意义下满足原方程。这样的极限函数就被称为弱解。在不同的意义下就可定义不同的弱解。紧性方法常常是非常有效的，即使是大初值、超临界情形也是。这种方法一般给出了解关于时间的整体存在性，但没有唯一性。唯一性得另外证明。用这种方法的缺陷是即使所给问题的初值是光滑的，但所得到的解往往是低正则的。我们仅知道在弱意义（分布）下能解这样的方程。在这样弱的意义下，方程的弱解满足常常不再是一个守恒量而是会被一种不等式来代替。所以用这种方法的一些附加的工作是提升解的正则性，证明解的唯一性等，但这往往是非常困难的。

第二章　分析基础

这一章我们将介绍在现代偏微分方程学习或研究中经常遇到的一些分析基础，并不限于本书所需的范围，其中的一些概念或记号均是通用的，所以在应用的过程中就不一定作说明或解释。所涉及的大部分内容是经典的，我们也相信读者已具备相关的基础知识，因此我们并不要求在内容上的自包含。

§2.1　L^p 空间及其插值空间

2.1.1　L^p 空间

偏微分方程的解通常可以由积分算子来表示或逼近。这些算子的重要特征是它们可以描述成在 Lebesgue 空间 L^p 上的作用。如点点有界对应于 L^∞ 估计，能量可由 L^2 范数来度量等。此外，为估计解的衰减性、正则性和非线性干扰强度往往要求我们寻找更宽的可积指数 p $(1 \le p \le \infty)$ 来描述。

L^p 空间的基本性质　在一个集 Ω 上给定一个测度 μ, 对于 $1 \le p < \infty$ ，定义 $L^p(\mathrm{d}\mu)$ 的范数为

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p \mathrm{d}\mu(x)\right)^{1/p},$$

对于 $p = \infty$,

$$\|f\|_{L^\infty} = \operatorname*{esssup}_{x\in\Omega} |f(x)|.$$

当 $1 \le p \le \infty$ 时，赋予上述范数的 $L^p(\Omega)$ 是一个 Banach 空间。当 $1 \le p < \infty$ 时，是可分的。当 $1 < p < \infty$ 时，$L^p(\Omega)$ 是自反的，所以其闭单位球是弱紧的。

由范数的定义立即可以看出，函数 $f(x)$ 的 L^∞ 范数，事实上就是使得对于任何 $x \in \Omega$, 逐点界 $|f(x)| \le \|f\|_{L^\infty}$ 成立的最小实数。如果取 $f = C\chi_E$, 其中 C 是正常数，χ_E 是某具有有限测度集合 E 上的特征函数。这样 $\|f\|_{L^p} = C|E|^{1/p}$, 其中的 $|E|$ 是 E 的测度。当 $p \to +\infty$ 时，它趋于函数的高度 $C = \|f\|_{L^\infty}$。从直观上来看，对于 $\mathbb{R}^n$ 上的 L^p 范数的有界性，若 p 大，则可以倾向于认为它能排除函数所定义的区域虽不宽，但很高尖的函数。这样的范数刻画不出函数在一个点的局部奇性；若 p 小，则可以排除那些有平坦宽广的尾巴的函数，即在无限远处没有足够衰减性的函数。不论是哪种情形，都排除了既高又宽广的函数，但也均不排除平坦但不宽广的函数。

由 Young 不等式 $|ab| \le |\varepsilon a|^p/p + |b/\varepsilon|^{p'}/p'$, $p > 1, 1/p + 1/p' = 1$, 容易得到 Hölder 不等式

$$\|uv\|_{L^1(\Omega)} \le \|u\|_{L^p(\Omega)}\|v\|_{L^{p'}(\Omega)}.$$

对于 $u \in L^p(\Omega), v \in L^{p'}(\Omega), p \geq 1$ 成立。这个不等式可以推广到 N 个函数的情形。设 $f_i \in L^{p_i}, 1 \leq p_i \leq +\infty, (i = 1, \cdots, N)$, 且 $\frac{1}{p} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{p_i}, 1 \leq p \leq +\infty$, 则 $\Pi_{i=1}^N f_i \in L^p(\Omega)$, 且

$$\|\Pi_{i=1}^N f_i\|_{L^p(\Omega)} \leq \Pi_{i=1}^N \|f_i\|_{L^{p_i}(\Omega)}. \tag{2.1.1}$$

由 Hölder 不等式, 对于 $u \in L^r(\Omega) \cap L^p(\Omega)$, 立刻有

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq \|u\|_{L^p(\Omega)}^{\lambda} \|u\|_{L^r(\Omega)}^{1-\lambda},$$

其中的 $p < q < r$, $1/q = \lambda/p + (1-\lambda)/r, \lambda \in (0,1)$。

若 F 是 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}$ 的一个凸函数, $E \subset \mathbb{R}^n$ 是一有界可测集, 对于 $f \in L^1(E)$, 有下面的 Jensen 不等式成立:

$$F\left(\frac{1}{|E|}\int_E f(x)\mathrm{d}x\right) \leq \frac{1}{|E|}\int_E F(f(x))\mathrm{d}x,$$

其中的 $|E|$ 是 E 的测度。

设 μ 和 ν 分别是集 Ω 和 Γ 上的 σ 有限测度, f 是 $\Omega \times \Gamma$ 上的一个可测函数。对于 $1 \leq p \leq \infty$, Minkowski 不等式为

$$\|\int_\Gamma f(\cdot, y)\mathrm{d}\nu\|_{L^p(\mathrm{d}\mu)} \leq \int_\Gamma \|f(\cdot, y)\|_{L^p(\mathrm{d}\mu)}\mathrm{d}\nu.$$

给定一个 μ 可测函数 f 和一个正数 α, 用 $\Lambda(f,\alpha) = \mu\{x \in \Omega : |f(x)| > \alpha\}$ 表示由 f 定义的分布函数。

对于 $1 \leq p < \infty$, 有如下 Chebyschev 不等式:

$$\Lambda(f,\alpha) \leq \alpha^{-p}\|f\|_{L^p}^p \tag{2.1.2}$$

f 的 L^p 范数可由其分布函数来表示:

$$\int |f(x)|^p \mathrm{d}x = \int_0^\infty \Lambda(|f|^p, \beta)\mathrm{d}\beta = p\int_0^\infty \alpha^{p-1}\Lambda(f,\alpha)\mathrm{d}\alpha \tag{2.1.3}$$

L^p 的原子分解 对于一个满足 $\Lambda(f,\alpha) < \infty$ 的可测函数 f, 我们可以定义其非增重排 $f^*(t) = \inf\{\alpha > 0 : \Lambda(f,\alpha) \leq t\}$。显然, f^* 是 $(0,\infty)$ 中的非负、非增函数。另外, 如果 $\Lambda(f,\alpha)$ 是严格增的连续函数, 则 $\Lambda(f,\alpha)$ 可逆, 且 $f^* = \Lambda^{-1}(f,\cdot)$。我们可以说明 f^* 是一个右连续的函数。这样 $f^*(t)$ 可以等价地定义为: $\alpha \in [f(t_+), f(t_-)]$ 当且仅当 $\mathrm{mess}\{x \in \Omega, |f(x)| > \alpha\} \leq t \leq \mathrm{mess}\{x \in \Omega, |f(x) \geq \alpha|\}$。如有必要可以延拓定义, 当 $t >\mathrm{mess}(\Omega)$ 时 $f^*(t) = 0$。对于这样的重排, 我们有如下的基本性质, 即如果 Φ 是定义在 $[0,\infty)$ 上的一个连续函数, 则 $\int_\Omega \Phi(|f(x)|)\mathrm{d}x = \int_0^{\mathrm{mess}(\Omega)} \Phi(f^*(t))\mathrm{d}t$。特别地, $\int |f|^p \mathrm{d}x = \int_0^\infty (f^*(t))^p \mathrm{d}t$。这意味着 L^p 是一个非增重排不变的空间。

命题 2.1.1 *(L^p 的原子分解)。设 $1 \leq p < \infty$, 任何函数 $f \in L^p$ 能写成*

$$f(x) = \sum_{\lambda \in 2^{\mathbb{Z}}} c_\lambda h_\lambda(x),$$

其中这些 h_λ 有不交的支集, 和 $\mu(\mathrm{Supp}h_\lambda) \lesssim \lambda$, $|h_\lambda(x)| \leq \lambda^{-1/p}$,$\sum |c_\lambda|^p \approx \|f\|_{L^p}^p$。

证明　设 f^* 是 f 的非增重排, $f^*(\lambda)=\inf\{\alpha:\Lambda(f,\alpha)\le\lambda\}$。从 Λ 和 f^* 的定义, 我们有

$$f^*(\lambda)\le\alpha\Longleftrightarrow\Lambda(f,\alpha)\le\lambda \tag{2.1.4}$$

令 $c_\lambda=\lambda^{1/p}f^*(\lambda)$ 和

$$h_\lambda(x)=\begin{cases}c_\lambda^{-1}f(x), & \text{如果} f^*(2\lambda)<|f(x)|\le f^*(\lambda),\\ 0 & \text{否则}.\end{cases}$$

由构造 $h_\lambda(x)\le\lambda^{-1/p}$ 和 (2.1.4), 我们有

$$\mu(\mathrm{Supp}h_\lambda)\le\Lambda(f,f^*(2\lambda))\le 2\lambda.$$

当 $f^*(2\lambda)<\alpha<f^*(\lambda)$ 时, 从 (2.1.4) 可得 $\Lambda(f,\alpha)\approx\lambda$。我们利用公式 (2.1.3) 发现

$$\begin{aligned}\int|f(x)|^p\mathrm{d}x &= \sum_\lambda p\int_{f^*(2\lambda)}^{f^*(\lambda)}\Lambda(f,\alpha)\alpha^{p-1}\mathrm{d}\alpha\approx\sum_\lambda\lambda p\int_{f^*(2\lambda)}^{f^*(\lambda)}\alpha^{p-1}\mathrm{d}\alpha\\ &= \sum_\lambda\lambda(f^*(2\lambda)^p-f^*(\lambda)^p)\approx\sum_\lambda\lambda f^*(\lambda)^p=\sum_\lambda c_\lambda^p.\end{aligned}$$

Hardy 不等式　利用 Jensen 不等式和 Fubini 定理可以证明下面的 Hardy 不等式:

设 $1\le p<\infty, r>0$, f 是 $(0,\infty)$ 上的非负可测函数, 则对于 $F(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t, x>0$, 有不等式

$$\int_0^\infty F(x)x^{p-r-1}\mathrm{d}x\le\left(\frac{p}{r}\right)^p\int_0^\infty f(t)t^{p-r-1}\mathrm{d}t$$

成立。

下面介绍一个类似于 Ascoli 引理的 L^p 空间的紧性定理。

定理 2.1.1　*$L^p(\mathbb{R}^n)$ 中的有界序列 $\{u_j\}$, $1\le p<\infty$, 若满足*

1)　*对于任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在 $R(\varepsilon)$, 使得 $\int_{|x|\ge R(\varepsilon)}|u_j|^p\mathrm{d}x\le\varepsilon$ 对所有的 j 成立;*

2)　*对于任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得如果 $|h|\le\delta$, 有 $\int_{\mathbb{R}^n}|u_j(x+h)-u_j(x)|^p\mathrm{d}x\le\varepsilon$;*

则存在子序列在 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 中强收敛于 $u\in L^p(\mathbb{R}^n)$。

证明　我们只要证明对于每个 $\alpha>0$, 能分解 $u_j=v_j+w_j$ 使得 $\|w_j\|_{L^p}\le\alpha$。从 v_j 中可选取子序列收敛, 仍记该子列为 v_j, 对于子列 u_j 就有 $\overline{\lim}_{j,j'\to\infty}\|u_j-u_{j'}\|\le 2\alpha$。再从选取了的子序列出发, 用 $\alpha/2$ 取代 α 重复这一过程, 如此继续, 然后取对角线子序列得一个 Cauchy 序列。

设 $\theta\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ 使得 $0\le\theta\le 1$, 满足当 $|x|\le R(\varepsilon)$ 时, $\theta(x)=1$。选取 $v_j=\theta u_j$, $w_j=(1-\theta)u_j$。注意到条件 1) 中 $\|w_j\|_{L^p}\le\varepsilon$, 由于 $\tau_hv_j-v_j=(\tau_h-\theta)\tau_hu_j+\theta(\tau_hu_j-u_j)$, $\|\tau_h\theta-\theta\|_{L^\infty}\le M|h|$, 我们有 v_j 在 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 中有界。其支集在一固定的有界集中且满足条件 2)。

设 u_j 满足条件 2) 并且其支集在一个有界集中, $v_j = u_j * J_\delta$, $w_j = u_j - u_j * J_\delta$, 其中 J_δ 是标准的磨光子。由于 v_j 是支集在一个固定的有界集中 Lipschitz 函数的有界序列, 用 Arela-Ascoli 引理即得。由于 $w_j(x) = \int_{\mathbb{R}^n} J_\delta(y)(u_j(y) - u_j(x-y))\mathrm{d}y$, 有 $\|w_j\|_{L^p} \le \int_{\mathbb{R}^n} J_\delta(y)\|u_j - \tau_y u_j\|_{L^p}\mathrm{d}y \le \varepsilon$。

注 2.1.1 多数紧性定理来自于基本的 Ascoli 引理。如果 u_n 是一个可分的紧度量空间 X 上的有界函数序列, 则对每个 $x \in X$, 我们能选取一个收敛的子列。由对角线法则, 这能对可数稠密子空间中的 x 成立。如果我们假设序列在每个点上是等度连续的, 则可延拓到其他的点。

2.1.2　Fourier 变换

关于 Fourier 变换, 我们假设读者是已知的, 为方便我们做简单的回顾。设 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, 用 $\hat{f}$ 或 $\mathcal{F}f$ 记 f 的 Fourier 变换

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-ix\cdot\xi} f(x)\mathrm{d}x.$$

设 $\mathcal{S}$ 是速降函数空间, 即

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : |\partial^\alpha f(x)| \le C_{\alpha,N}(1+|x|)^{-N}, \forall \alpha, N\}.$$

Fourier 变换有如下一些基本事实: Gaussian 函数 $\mathrm{e}^{-\frac{|x|^2}{2}}$ 在相差一个常数之下是不变的, 即 $\widehat{\mathrm{e}^{-\frac{|x|^2}{2}}} = (2\pi)^{n/2}e^{-\frac{|\xi|^2}{2}}$; 如果 $f \in L^1$, 则 $\hat{f}$ 是一致连续的, 且 $\hat{f} \in C_0(\mathbb{R}^n)$; $\widehat{D_j u} = \xi_j \hat{u}$, $\widehat{x_j u} = -D_j\hat{u}$。

Fourier 变换将物理空间与频率空间之间建立起了一种对应关系。它将物理空间的平移变换 $\tau_h f(x) = f(x-h)$ 变为频率空间的一个旋转。即,

$$\widehat{\tau_h f}(\xi) = \mathrm{e}^{-i\langle h,\xi\rangle}\hat{f}(\xi);$$

反过来, 又将物理空间的一个旋转变为频率空间的平移变换,

$$\mathrm{e}^{i\widehat{\langle h,x\rangle f}(x)}(\xi) = \tau_h\hat{f}.$$

Fourier 变换将物理空间的伸缩对应于频率空间的对偶伸缩。具体地, 设 L 是 $\mathbb{R}^n$ 上的可逆线性变换, $S = (L^*)^{-1}$ 是其转置逆。则

$$\widehat{f \circ L} = |\mathrm{det}L|^{-1}\hat{f} \circ S.$$

例如, 如果 A 是一个非异的具正定实部的对称阵, 则

$$\widehat{\mathrm{e}^{-(Ax,x)/2}} = \frac{(2\pi)^{n/2}}{\sqrt{|\mathrm{det}A|}}\mathrm{e}^{-(A^{-1}\xi,\xi)/2},$$

特别地, 如果 L 是一个旋转, 则 $\widehat{f \circ L} = \hat{f} \circ S$; 如果 $Lx = \lambda^{-1}x, (\lambda > 0)$, 则 $\widehat{f \circ L}(\xi) = \lambda^n\hat{f}(\lambda\xi)$; 当 $n = 1$ 时, $\widehat{f(x\lambda^{-1})} = \lambda\hat{f}(\xi\lambda)$。这等式可以解释为物理空间

保持高度（L^∞ 范数）的一个伸缩对应到频率空间的是保持质量（L^1 范数）的伸缩。如果我们选择伸缩变换 $f(x)=\lambda^{-1/2}f(\frac{x}{\lambda})$，则在 L^2 范数的意义下物理空间和频率空间有同样的伸缩方式。从上面的性质也可以看出，一个函数在频率空间的衰减性与其对应物在物理空间的正则性之间有着密切的联系，我们可以在 Sobolev 空间这一节中具体地看到这一点。

Fourier 变换是 $\mathcal{S}$ 上的一个同构变换。对于 $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$，Fourier 逆变换公式成立。

$$f(x)=(2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n}\mathrm{e}^{ix\xi}\hat{f}(\xi)\mathrm{d}\xi \tag{2.1.5}$$

对于 $f,g\in\mathcal{S}$，则有 Paseval 关系式 $\int f\bar{g}=(2\pi)^{-n}\int\hat{f}\widetilde{\hat{g}}d\xi$ 成立，特别当 $f=g$ 时说明在相差一个常数的意义下 Fourier 变换在 L^2 中等距，这被称为 Plancherel 等式；下式表明物理空间中的乘积对应于频率空间的卷积，而物理空间的卷积对应于物理空间的乘积：$\widehat{f*g}=\hat{f}\hat{g}$；$\widehat{fg}=(2\pi)^{-n}\hat{f}*\hat{g}$。

另外，Paley-Wiener-Schwartz 定理告诉我们：一个缓增分布 u 是小于或等于 N 阶的且支集在一个半径为 R 的球中的充要条件是：其 Fourier 变换是全纯的且存在一个常数 C，使得

$$|\hat{u}(\zeta)|\le C(1+|\zeta|)^N\mathrm{e}^{R|\mathrm{Im}\zeta|}$$

成立。

2.1.3 插值理论

插值理论的一个基本思想不难从如下的基本不等式

$$\|f\|_{L^2}\le\|f\|_{L^1}^{1/2}\|f\|_{L^\infty}^{1/2}$$

可以看出。它意味着人们可以用两头的范数来控制中间的范数。不难看出，这样的理论一定是一个既强有力又方便的工具。

在这一节我们将介绍抽象的插值理论，在此之前我们先介绍几个经典的插值结果，可以说是作用在 L^p 空间上的线性算子的一般插值结果，它基于对条形区域 $D=\{z\in\mathbb{C}:0<\Re(z)<1\}$ 的一些最大模定理。我们将用 $A_{BC}(D)$ 记在 D 的闭包上连续有界及在 D 上解析的函数集合。

引理 2.1.1 *(三线引理)设 $f\in A_{BC}(D)$，使得*

$$|f(0+ib)|\le M_0,|f(1+ib)|\le M_1$$

对 $b\in\mathbb{R}$ 成立，则对所有 $0<a<1$ 和 $b\in\mathbb{R}$，

$$|f(a+ib)|\le M_0^{1-a}M_1^a.$$

为介绍 Stein-Riesz 插值定理，我们先回顾一个解析算子族的概念：

定义 2.1.1 *假设我们有一族线性算子 $T_z,z\in D$，具有下面的性质：(1) T_z 将简单函数映为可测函数；(2) 对任何一对简单函数 f,g，映照 $z\longmapsto\int g(x)T_zf(x)\mathrm{d}x\in A_{BC}(D)$。则我们说 $\{T_z\}_{z\in D}$ 是一个解析算子族。*

注 2.1.2 在前面的定义中将简单函数选为试验函数的理由是由于它们在 $L^p, p\in[1,\infty)$, 中稠密。

定理 2.1.2 设 T_z 是一解析算子族且对每个 $b\in\mathbb{R}$ 存在正常数 M_0, M_1 使得

$$\|T_{ib}f\|_{L^{q_0}}\le M_0\|f\|_{L^{p_0}}, \|T_{1+ib}f\|_{L^{q_1}}\le M_1\|f\|_{L^{p_1}}.$$

$1\le q_0,p_0,q_1,p_1\le\infty$。则对于 $z=a+ib\in D$, T_z 可以延拓到从 L^p 到 L^q 的一个有界算子, 且

$$\|T_zf\|_{L^q}\le M_0^{1-a}M_1^a\|f\|_{L^p}, \tag{2.1.6}$$

其中 $\frac{1}{p}=\frac{1-a}{p_0}+\frac{a}{p_1}, \frac{1}{q}=\frac{1-a}{q_0}+\frac{a}{q_1}$。

证明 由对偶性, 我们得证明对每对简单函数 f, g, $\|f\|_{L^p}=\|g\|_{L^{q'}}=1$

$$|\int g(x)T_zf(x)\mathrm{d}x|\le M_0^{1-a}M_1^a$$

成立。固定这样一对 f, g 且考虑相关的简单函数族 (解析)

$$f_z(x)=|f(x)|^{\frac{p}{p(z)}-1}f(x), g_z(x)=|g(x)|^{\frac{q'}{q'(z)}-1}g(x),$$

其中 $p(z), q'(z)$ 满足指数关系 $\frac{1}{p(z)}=\frac{1-z}{p_0}+\frac{z}{p_1}, \frac{1}{q'(z)}=\frac{1-z}{q_0'}+\frac{z}{q_1'}$。这里我们使用约定 $1/\infty=0$, 特别地, 如果 $p_0=p_1=\infty$ 则 $p=p(z)=\infty, f_z\equiv f$, 类似地 $q_0'=q_1'=\infty$, 则 $q'=q'(z)=\infty, g_z\equiv g$ 。容易验证 $\|f_z\|_{L^{\Re(p(z))}}=\|f\|_{L^p}=1, \|g_z\|_{L^{\Re(q'(z))}}=\|g\|_{L^{q'}}=1$。现在考虑定义在 D 上的映照

$$h(z)=\int g_z(x)T_zf_z(x)\mathrm{d}x.$$

从我们的构造, 线性性质和 T_z 解析性不难看出 $h\in A_{BC}(D)$。由假设我们看出对于每个 $b\in\mathbb{R}$, $|h(ib)|\le M_0$ 和 $|h(1+ib)|\le M_1$。从三线引理有 $|h(z)|\le M_0^{1-\Re(z)}M_1^{\Re(z)}$, 特别有 (2.1.6) 成立。

我们常常需要在已知核 K 的极少信息下, 通过 f 在某函数空间的大小来估计形如

$$Tf(x)=\int K(x,y)f(y)\mathrm{d}y \tag{2.1.7}$$

的积分算子, 这种类型的最简单的结果是 Young 的定理。

定理 2.1.3 *(Young)* 设 $K(x,y)$ 是一个可测函数, 对于某个 $1\le r\le\infty$, 我们有

$$\sup_x\|K(x,\cdot)\|_{L^r}\le 1, \sup_y\|K(\cdot,y)\|_{L^r}\le 1.$$

则对于

$$1\le p\le r' \text{和} 1+\frac{1}{q}=\frac{1}{r}+\frac{1}{p} \tag{2.1.8}$$

我们有

$$\|Tf\|_{L^q}\lesssim\|f\|_{L^p}. \tag{2.1.9}$$

证明　直接应用 Hölder 不等式到 T 的定义，我们得到端点估计

$$\|Tf\|_{L^\infty} \le \|f\|_{L^{r'}}. \tag{2.1.10}$$

注意到其对偶算子 T^* 与 T 有同样的形式

$$T^*g(y) = \int \overline{K(x,y)}g(x)\mathrm{d}x.$$

因此

$$\|T^*g\|_{L^\infty} \le \|g\|_{L^{r'}}.$$

由对偶性给出另一端点的估计:

$$\|Tf\|_{L^r} \le \|f\|_{L^1}. \tag{2.1.11}$$

最后, 利用 定理 2.1.2, $T_z \equiv T$, (2.1.10) 与 (2.1.11) 之间的插值得 (2.1.9)。作为一个立刻的推论, 当 K 是平移不变时, $K(x,y) = K(x-y)$, 我们就得到众所周知的卷积估计:

$$\|K * f\|_{L^q} \le \|K\|_{L^r}\|f\|_{L^p},$$

当指数 $1 \le p,q,r \le \infty$ 满足 (2.1.8) 时成立。

对于一个函数 f, 比 L^p 可积性稍弱一些的条件是弱 -L^p 性质。

定义 2.1.2 对于 $1 \le p < \infty$, 我们说 f 是属于弱 -L^p 的, 如果对于每个 $\alpha > 0, \Lambda(f,\alpha) \lesssim \alpha^{-p}$ 成立. 如果 $p=\infty$, 则弱 -L^∞ 与 L^∞ 一致。

定理 2.1.4 (Marcinkiewicz **插值**) 考虑一个算子 T 映 X 上的可积函数到 Y 上的可测函数。设 T 是次可加的, 其意义为 $|T(f+g)(x)| \lesssim |Tf(x)| + |Tg(x)|$。

对于 $i=1,2$和$1 \le p_1 < p_2 \le \infty$, 设 T 从 $L^{p_i}(Z)$ 映到弱 -$L^{p_i}(Y)$, 满足

$$\Lambda(Tf,\alpha) \lesssim \alpha^{-p_i}\|f\|_{L^{p_i}}^{p_i},$$

则对于任何 $p \in (p_1,p_2)$, T 映 $L^p(X)$ 到 $L^p(Y)$, 满足

$$\|Tf\|_{L^p} \lesssim \|f\|_{L^p},$$

证明　给定 $f \in L^p(X)$,$\alpha > 0$。将 f 写为 $f = f^\alpha + f_\alpha$, 其中

$$f^\alpha(x) = \begin{cases} f(x), & |f(x)| > \alpha, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} f(x), & |f(x) \le \alpha, \\ 0 & \text{其他}. \end{cases}$$

特别地, $f^\alpha \in L^{p_1}$, $f_\alpha \in L^{p_2}$。

首先考虑 $p_2 < \infty$。由 T 的次可加性我们有

$$\Lambda(Tf,2\alpha) \lesssim \Lambda(Tf^\alpha,\alpha) + \Lambda(Tf_\alpha,\alpha) \lesssim \alpha^{-p_1}\|f^\alpha\|_{L^{p_1}}^{p_1} + \alpha^{-p_2}\|f^\alpha\|_{L^{p_2}}^{p_2} \tag{2.1.12}$$

应用公式 (2.1.3) 得

$$\begin{aligned}&\int |Tf(x)|^p \mathrm{d}x\\ \lesssim\ & \int\int_{0<\alpha<|f(x)|} |f(x)|^{p_1}\alpha^{p-p_1-1}\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}x + \int\int_{|f(x)|\le\alpha} |f(x)|^{p_2}\alpha^{p-p_2-1}\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}x\end{aligned}$$

由于 $p-p_1-1>-1$, 且 $p-p_2-1<-1$ 有 $\int_0^{|f(x)|}\alpha^{p-p_1-1}\mathrm{d}\alpha \simeq |f(x)|^{p-p_1}$, $\int_{|f(x)|}^{\infty}\alpha^{p-p_2-1}\mathrm{d}\alpha \simeq |f(x)|^{p-p_2}$, 这就是我们要的结论。

在 $p_2=\infty$ 情形下，证明实际上更简单。由于 $|Tf_\alpha(x)| \lesssim \|f_\alpha\|_{L^\infty} \le \alpha$, 我们仅需注意到 $|Tf(x)| >> \alpha$ 意味着 $|Tf^\alpha(x)| >> \alpha$。因此我们能由

$$\Lambda(Tf, c\alpha) \lesssim \Lambda(Tf^\alpha, \alpha) \lesssim \alpha^{-p_1}\|f^\alpha\|_{L^{p_1}}^{p_1}$$

取代 (2.1.12), 其中 c 是某个正常数。证明如前。

为介绍抽象的插值空间理论，我们先引入一个框架。

定义 2.1.3 设 A_0 和 A_1 是赋范空间，连续地嵌入一个拓扑向量空间 $\mathcal{E}$, 使得 $A_0\cap A_1$ 和 A_0+A_1 有定义。如果赋范空间 A 满足如下条件，则称 A 是 A_0 和 A_1 之间的一个插值空间：$A_0\cap A_1 \subset A \subset A_0+A_1$, 并且对每个使得 A_0 到自身、A_1 到自身连续的从 A_0+A_1 到自身的线性映照能自动地成为从 A 到自身的连续映照。如果存在一个常数 C 使得对任何 $T\in\mathcal{L}(A_0,A_0)\cap\mathcal{L}(A_1,A_1)$ 有下面的不等式成立

$$\|T\|_{\mathcal{L}(A,A)} \le C\|T\|_{\mathcal{L}(A_0,A_0)}^{1-\theta}\|T\|_{\mathcal{L}(A_1,A_1)}^{\theta},$$

则称此插值空间 A 是 θ 型的，$0\le\theta\le 1$。

获取插值空间的方法是多样的，不同的方法可以得到不同的插值空间。但通常的方法是所谓的 K- 方法。我们在此简单地介绍一下 K- 方法，这种方法是研究如下迹问题的自然产物：

如果 $u\in L^{p_0}(0,\infty;A_0)$ 和 $u'\in L^{p_1}(0,\infty;A_1)$ 满足 $1\le p_0,p_1\le\infty$, 则 $u\in C^0([0,1];A_0+A_1)$。

据此 $u(0)$ 存在，这样一个在 0 点的取值问题就是迹问题。对于 $\lambda>0$, 如果人们用 $u(t^\lambda)$ 来取代 $u(t)$ 则 $u(0)$ 不变，因此人们发现可以考虑使得 $t^{\alpha_0}u\in L^{p_0}(0,\infty;A_0)$ 和 $t^{\alpha_1}u\in L^{p_1}(0,\infty;A_1)$ 以及对于某个参数集 $u(0)$ 存在的问题。

定义 2.1.4 设 A_0 和 A_1 是赋范空间，连续地嵌入一个拓扑向量空间 $\mathcal{E}$, 使得我们能分别定义 $A_0\cap A_1$, 赋予范数 $\|a\|_{A_0\cap A_1}=\max\{\|a\|_{A_0},\|a\|_{A_1}\}$ 和 A_0+A_1, 赋予范数 $\|a\|_{A_0+A_1}=\inf_{a=a_0+a_1}\{\|a_0\|_{A_0}+\|A_1\|_{A_1}\}$。

对于 $a\in A_0+A_1$ 和 $t>0$ 我们定义 $K(t,a)=\inf_{a=a_0+a_1}\{\|a_0\|_{A_0}+t\|A_1\|_{A_1}\}$。

对于 $0<\theta<1$ 和 $1\le p\le\infty$, 或对于 $\theta=0,1$ 满足 $p=\infty$, 我们定义 $(A_0,A_1)_{\theta,p}$ 作为 $a\in A_0+A_1$ 使得 $t^{-\theta}K(t,a)\in L^p(0,\infty;\frac{\mathrm{d}t}{t})$ 的空间，赋予范数 $\|a\|_{(A_0,A_1)_{\theta,p}}=\|t^{-\theta}K(t,a)\|_{L^p(0,\infty;\mathrm{d}t/t)}$。

对于 $t>0, A\mapsto K(t,a)$ 是一个范数，等价于 A_0+A_1 上的范数。$K(t,a)$ 关于 t 是非减的，$K(t,a)/t$ 关于 t 是非增的，此外 $K(t,a)$ 关于 t 是凹的，作为仿射函数下确界，因此是连续的。对于 $0<\theta<1$ 和 $1\le p<q\le\infty$, 有连续嵌入

$(A_0,A_1)_{\theta,p}\subset(A_0,A_1)_{\theta,q}$。事实上，如果 $1\le p<\infty$，和 $t_0>0$，对于 $t>t_0$ 我们有 $K(t,a)\ge K(t_0,a)$，因此 $\|a\|^p_{(A_0,A_1)_{\theta,p}}\ge K(t_0,a)^p\int_{t_0}^{\infty}t^{-\theta p}\frac{\mathrm{d}t}{t}=K(t_0,a)^p\frac{t_0^{-\theta p}}{\theta p}$，给出 $t_0^{-\theta}K(t_0,a)\le C\|a\|_{(A_0,A_1)_{\theta,p}}$，这样 $\|t^{-\theta}K(t,a)\|_{L^q(0,\infty;\frac{\mathrm{d}t}{t})}\le C\|a\|_{(A_0,A_1)_{\theta,p}}$，并且由 Hölder 不等式我们得到对于 $p\le q\le\infty$，$\|a\|_{(A_0,A_1)_{\theta,p}}=\|t^{-\theta}K(t,a)\|_{L^q(0,\infty;\frac{\mathrm{d}t}{t})}\le C'\|a\|_{(A_0,A_1)_{\theta,p}}$。

因为对于 $a\in A_0+A_1$，我们有 $K(t,a)\ge\min\{1,t\}\|a\|_{A_0+A_1}$，这就看到如果 $(A_0,A_1)_{\theta,p}$ 不缩减到 $\emptyset$，必有 $t^{-\theta}\min\{1,t\}\in L^p(0,\infty;\frac{\mathrm{d}t}{t})$ 和如果 $\theta<0$ 或 $\theta>1$ 空间 $(A_0,A_1)_{\theta,p}$ 缩减到 $\emptyset$，在 $\theta=0$ 或 $p<\infty,\theta=1$ 情形也是如此。

Lorentz **空间** $L^{p,q}(\Omega)$: $A_0=L^1(\Omega)$，$A_1=L^\infty(\Omega)$，对于 $1<p<\infty$，$1\le q\le\infty$，Lorentz 空间 $L^{p,q}(\Omega)=(L^1(\Omega),L^\infty(\Omega))_{1/p',q}$。我们可以说明对于任何函数 $f\in L^1+L^\infty$，都有 $K(t,f)=\int_0^t f^*(s)\mathrm{d}s$ 对所有 $t>0$ 成立。还可以证明

命题 2.1.2 *对于 $1<p<\infty$ 和 $1\le q\le\infty$，我们有 $L^{p,q}(\Omega)=\left(L^1\Omega,L^\infty(\Omega)\right)_{1/p',q}=\{f\in L^1+L^\infty\Omega,t^{1/p}f^*(t)\in L^q(0,\infty,\frac{\mathrm{d}t}{t})\}$，且 $\|t^{1/p}f^*\|_{L^q(0,\infty,\frac{\mathrm{d}t}{t})}$ 是一个等价范数。特别地，在等价范数意义下 $L^{p,p}(\Omega)=L^p(\Omega)$，或*

$$\|f\|_{L^p}\le\|f\|_{L^{p,p}}\le p'\|f\|_{L^p},\ \frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1;$$

Lorentz 空间有包含关系：$L^{p,q}\subset L^{p,r}\subset L^{p,\infty}$，$1<q<r<\infty$；$L^{p,\infty}(\Omega)$ 在等价范数下是弱 -$L^p(\Omega)$ 空间（存在一个 M 使得对 Ω 的每个可测集 E，有 $\int_E|f|\mathrm{d}x\le M\mathrm{meas}(E)^{1/p'}$）。

$L^{p,\infty}(\Omega)$ 包含 $L^p(\Omega)$，但也包含像 $\frac{1}{|x|^{n/p}}$ 这样的函数。不难看到，弱 -L^p 空间和 Lorentz 空间都是非增重排不变空间。

我们前面已经说过，不同的方法可以得到不同的插值空间，但这样的不同通常是第二个指标参数的不同。通常的标尺平衡分析对于 Lorentz 空间的第二指标往往是不敏感的。所以我们不能用之来检验一个结论的最优性。例如，如果 $u\in L^1(\mathbb{R}^n)+L^\infty(\mathbb{R}^n)$，$\lambda\ne0$，令 $U(x)=u(\lambda x),x\in\mathbb{R}^n$，则 u 的任何分解 $u=u_0+u_1$ 满足 $u_0\in L^1(\mathbb{R}^n)$ 和 $u_1\in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 给出 U 的一个分解 $U=U_0+U_1$ 满足 $U_j(x)=u_j(\lambda x),j=0,1$，则 $\|U_0\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}=|\lambda|^{-n}\|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$ 和 $\|U_1\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}=|\lambda|^{-n}\|u_1\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$，因此 $K(t,U)=|\lambda|^{-n}K(t|\lambda|^n,u)$，由此导得 $\|U\|_{L^{p,q}}(\mathbb{R}^n)=|\lambda|^{-n}\|u\|_{L^{p,q}}(\mathbb{R}^n)$，参数 q 并不显含在范数变换的过程中。

§2.2 最大函数及其应用

2.2.1 最大平均函数

在 $L^p(\mathbb{R}^n)$，$1\le p\le\infty$，中的一个函数 f 可能具有非常坏的正则性质，给定一个 $\alpha>0$，使得 $|f(x)|>\alpha$ 的集合可以仅仅是可测集 (如果 $p<\infty$，具有有限测度)。当然也有正则性比较好的函数。这就促使人们考虑是否可将一个函数加以改造使得其

保持（几乎）相同的可积性，但有更好的局部正则性的函数 f 来取代原来的 f 描述之。例如，f 的最大平均函数能做到这一点。

定义 2.2.1 给定 $\mathbb{R}^n$ 上的一个可测函数 f，对 $x \in \mathbb{R}^n$，记 $\mathcal{B}_x$ 是所有中心在 x 的球的集合。Hardy-Littlewood 最大函数 Mf 定义为

$$Mf(x) = \sup_{B \in \mathcal{B}_x} \frac{1}{|B|} \int_{|B|} |f(y)| \mathrm{d}y.$$

如果上确界取在包含 x 的所有可能的欧氏球 B 上，即 $B \in \mathcal{B}(x)$，我们得到非中心的最大函数。

$$M_u f(x) = \sup_{B \in \mathcal{B}(x)} \frac{1}{|B|} \int_{|B|} |f(y)| \mathrm{d}y.$$

注 2.2.1 从定义我们立刻可知 Mf 和 $M_u f$ 是下半连续的。事实上，以 $M_u f$ 为例，对每个 $\alpha \geq 0$，集 $E_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n, M_u f(x) > \alpha\}$ 总是开的：如果 $x \in E_\alpha$ 则存在包含 x 的开球 B 使得

$$\frac{1}{|B|} \int_B |f(y)| \mathrm{d}y > \alpha \tag{2.2.1}$$

这也意味着 $M_u f(y) > \alpha$ 对每个 $y \in B$ 成立。因此，$B \subset E_\alpha$。由三角不等式我们也看到 $f \longmapsto Mf$ 是次可加的算子。

$$M(f+g)(x) \leq Mf(x) + Mg(x) \tag{2.2.2}$$

以及

$$Mf \leq M_u f(x) \leq 2^n Mf. \tag{2.2.3}$$

平均过程可以改善局部正则性，但由于取了上确界，Mf 是否保持 f 的可积性不详。如果 f 是本性有界的，则 Mf 是有界的且

$$\|Mf\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^\infty}. \tag{2.2.4}$$

但如果 f 是一个可积函数，并不能得到 Mf 是可积的。例如，取 $f = \chi_B \in L^1$，χ_B 是一个球上的特征函数，则 $Mf(x) \gtrsim (1+|x|)^{-n}$ 恰好不在 L^1 中。所幸的是，最大函数仍然保留了 f 的可积性的大多数的信息。

定理 2.2.1 如果 $f \in L^1$，则 $Mf \in$ 弱L^1。这是在对 $\alpha > 0$，有

$$|E_\alpha| = \Lambda(Mf(x), \alpha) \lesssim \frac{1}{\alpha} \|f\|_{L^1} \tag{2.2.5}$$

的意义下来说的，如果 $f \in L^p$，$1 < p \leq \infty$，则 $Mf \in L^p$ 且我们有

$$\|Mf\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p}. \tag{2.2.6}$$

证明　第二部分来自于第一部分和最大算子的 L^∞ 有界性以及 Marcinkiewicz 插值定理 2.1.4。因此我们仅需证明 (2.2.5)。

设 $f \in L^1$，固定 $\alpha > 0$。由注 (2.2.1)，我们能找出一族球 $\mathcal{B} = \{B\}$，使得 $E_\alpha = \cup_{B\in\mathcal{B}}$，和每个球 B 满足 (2.2.1)。如果这些球都不相交，则容易得到结论，因为在这种情形

$$|E_\alpha| \le \sum_{B\in\mathcal{B}} |B| < \frac{1}{\alpha}\sum_B \int_B |f(y)|\mathrm{d}y \le \frac{1}{\alpha}\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|\mathrm{d}y.$$

在一般情形，这些球并非不交的，为此我们得更小心些。设 K 是 E_α 的紧子集，则在 $\mathcal{B}$ 中选取有很多个子球 $\mathcal{B}'$ 覆盖 K 是可能的。应用我们将要证明的 引理 2.2.1，能在 $\mathcal{B}'$ 中选取另外一个有限子族 $\mathcal{B}''$，互不相交，使得

$$|\cup_{B'\in\mathcal{B}'} B'| \lesssim \sum_{B''\in\mathcal{B}''} |B''|.$$

则同上面的过程，有

$$|K| \lesssim \frac{1}{\alpha}\|f\|_{L^1},$$

取所有可能的紧子集 K 上的上确界，我们最后得到 (2.2.5)。

引理 2.2.1 *设 $B_1, \cdots, B_N$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中一个有限的球族，则可以选取一个子族 $B_{j_1}, \cdots, B_{j_M}, M \le N$，互不相交，使得*

$$|\cup_{j=1}^N B_j| \lesssim \sum_{k=1}^M |B_{j_k}| \tag{2.2.7}$$

证明 设我们已对球按半径非增的方式排列，$r_1 \ge r_2 \ge \cdots \ge r_N$。取 $j_1 = 1$ 使得 B_{j_1} 是半径为最大的球，则可归纳定义 j_{k+1} 是与前面已经选定的球 $B_{j_1}, \cdots, B_{j_k}$ 不相交的球 B_j 中的指标最小的一个，如果没有这样的球就停在第 k 步。由这样的构造，我们有每个球 B_j 交 $B_{j_k}, r_j \le r_k$ 中的一个球，因此 $B_j \subset B(x_{j_k}, 3r_{j_k})$，这意味着

$$|\cup_{j=1}^N B_j| \le |\cup_{k=1}^M B(x_{j_k}, 3r_{j_k})| \le 3^n \sum_{k=1}^M |B_{j_k}|.$$

如果函数 f 是连续的，则显然有

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} f(y)\mathrm{d}y = f(x) \tag{2.2.8}$$

作为 定理 2.2.1 的一个应用，我们能说明这个性质对局部可积函数仍成立。

推论 2.2.1 *(Lebesgue 微分定理) 如果 $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$，则 (2.2.8) 对几乎每个 x 都成立。*

证明 由于叙述是局部的，我们能设 $f \in L^1$。设 A_r 是由

$$A_r f(x) = |B(x,r)|^{-1}\int_{B(x,r)} f(y)\mathrm{d}y$$

定义的平均算子。证明分两步：第一步证明当 $r \to 0$ 时,$A_r f$ 在 L^1 中趋于 f，然后第二步只要说明极限 $\lim_{r\to 0} A_r f(x)$ 几乎处处存在。

对于第一步，给定 $\epsilon > 0$, 我们总能找到一个一致连续的函数 g 在 L^1 中收敛于 f, 且有 $\|A_r f - A_r g\|_{L^1} \le \|f-g\|_{L^1} < \epsilon$ 关于 r 是一致的。则由 g 的一致连续性，我们知道当 $r \to 0$ 时 $A_r g \to g$ 在 L^1 中成立，因此存在一个 r_ϵ 使得

$$\|A_r f - f\|_{L^1} \le \|A_r f - A_r g\|_{L^1} + \|A_r g - g\|_{L^1} + \|f-g\|_{L^1} \le 3\epsilon$$

对 $r < r_\epsilon$ 成立。

第二步, 定义一个 L^1 函数的振荡

$$\Omega f(x) = \lim_{r\to 0}\sup A_r f(x) - \lim_{r\to 0}\inf A_r f(x)$$

这是一个次可加算子，$\Omega(f+g) \le \Omega f + \Omega g$, 且由最大函数算子这是有界的，$\Omega f \le 2Mf$。此外，连续函数的振荡为 0。如果 g 是一个在 L^1 中收敛于 f 的连续函数，则我们有

$$\Omega f \le \Omega(f-g) + \Omega g = \Omega(f-g) \le 2M(f-g).$$

现在我们可以用最大函数的弱 L^1 性质，对于任何正的 α 我们有

$$|\{x : \Omega f(x) > \alpha\}| \le |\{x : M(f-g)(x) > \alpha/2\}| \lesssim \frac{1}{\alpha}\|f-g\|_{L^1}.$$

由于 $\|f-g\|_{L^1}$ 能任意小，我们得到 f 的振荡是正的点的集合是零测度的。

注 2.2.2 Lebesgue 微分定理允许平均在比一族半径收敛于零的球族更一般的集族上来叙述。例如，考虑包含 x 的非中心方体 Q_k，其边长 δ_k 当 $k \to \infty$ 时收敛于零。由于每个 Q_k 包含在一个中心为 x、半径为 $\sqrt{n}\delta_k$ 的球族 $\mathcal{B}$ 中，对非中心方体的最大值函数 M_{uq}，可由 $\tau_n \sqrt{n}^n M$ 来控制。$2M_{uq}$ 可以作为对于关于非中心方体的振荡的上界。如同 推论 *2.2.1* 的证明，我们得到 $f_k(x) = |Q_k|^{-1}\int_{Q_k} f(y)\mathrm{d}y$ 几乎处处收敛。为了看到极限点事实上就是 $f(x)$，我们可以取一个特殊的方体序列，中心在 x，通过 C^0 函数的逼近，我们证明 $\lim_{k\to\infty}\|f_k - f\|_{L^1} = 0$ 和几乎处处收敛性成立。

2.2.2　分数次积分

设 T 是作用在定义于 $\mathbb{R}^n$ 上的积分算子, 其核 k 如同 (2.1.7)。如果我们仅有的关于 $k(x,y)$ 的信息是如下的衰减估计, 即对某个 $\gamma > 0$ 成立，

$$|k(x,y)| \lesssim |x-y|^{-\gamma}.$$

则 Young 不等式，定理 2.1.3 ，并不允许我们得到一个关于 Tf 的较好的估计，由于 $|\cdot|^{-\gamma}$ 刚好不在 $L^{n/\gamma}$ 中。然而，卷积有磨光性质，这意味着包含在下面的重要定理中的正面结果成立。这个结果最早由 Hardy 和 Littlewood 对 $n=1$ 证明的，然后由 Sobolev 推广到 $n>1$。

定理 2.2.2 (Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式) 设 $0<\gamma<n$ 和 $1<p<q<\infty$ 使得

$$1-\frac{\gamma}{n}=\frac{1}{p}-\frac{1}{q}, \tag{2.2.9}$$

则

$$\||\cdot|^{-\gamma}*f\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}\lesssim\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}. \tag{2.2.10}$$

证明 我们能将带有奇异核的卷积分成两部分:

$$|\cdot|^{-\gamma}*f(x)=\int_{|y|\geq R}\frac{f(x-y)}{|y|^\gamma}\mathrm{d}y+\int_{|y|<R}\frac{f(x-y)}{|y|^\gamma}\mathrm{d}y.$$

由 Hölder 不等式, 我们可以简单地估计第一项,

$$\left|\int_{|y|\geq R}\frac{f(x-y)}{|y|^\gamma}\mathrm{d}y\right|\leq\|f\|_{L^p}\left(\int_{|y|\geq R}|y|^{-\gamma p'}\mathrm{d}y\right)^{1/p'}\lesssim R^{\frac{n}{p'}-\gamma}\|f\|_{L^p}.$$

其中需要可积性条件 $\gamma p'>n$, 由 (2.2.9) 知等价于 $q<\infty$。

对于第二部分我们围绕奇性进行二进分解, 得到一个由最大函数给出的估计.

$$\begin{aligned}\left|\int_{|y|<R}\frac{f(x-y)}{|y|^\gamma}\mathrm{d}y\right|&\leq\sum_{k=0}^{\infty}\int_{2^{-k-1}\leq\frac{|y|}{R}\leq2^{-k}}\frac{|f(x-y)|}{|y|^\gamma}\mathrm{d}y\\&\lesssim\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2^{-k}R)^\gamma}\int_{|y|\leq2^{-k}R}|f(x-y)|\mathrm{d}y\\&\lesssim\sum_{k=0}^{\infty}(2^{-k}R)^{n-\gamma}Mf(x)\simeq R^{n-\gamma}Mf(x)\end{aligned}$$

其中我们要求 $\gamma<n$, 目的是为了最后的几何级数收敛。

在这一点我们已经发现对每个 $x\in\mathbb{R}^n$ 和每个 $R>0$,

$$||\cdot|^{-\gamma}*f(x)|\lesssim R^{\frac{n}{p'}-\gamma}\|f\|_{L^p}+R^{n-\gamma}Mf(x).$$

我们优化这个不等式的选取, 对每个 x, 选取半径 $R=R(x)$, 使得右边的两项是相等的,

$$R^{\frac{n}{p'}-\gamma}\|f\|_{L^p}=R^{n-\gamma}Mf(x).$$

即

$$R(x)=\left(\frac{\|f\|_{L^q}}{Mf(x)}\right)^{p/n},$$

由于 $(n-\gamma)p/n=1-p/q$, 我们有

$$|Tf(x)|\lesssim\|f\|_{L^p}^{1-\frac{p}{q}}Mf^{\frac{p}{q}}.$$

然后在上式两边取 L^q 范数,

$$\|Tf(x)\|_{L^q}\lesssim\|f\|_{L^p}^{1-\frac{p}{q}}\|Mf(x)\|_{L^p}^{\frac{p}{q}}.$$

如果 $p>1$, 我们用对最大函数 (2.2.6) 的估计就能得到结论。

注 2.2.3 应用 Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式，我们给出 Sobolev 嵌入 $\|f\|_{L^q} \lesssim \|Df\|_{L^p}$，对于 $\frac{n}{q} = \frac{n}{p} - 1$ 在非极端区域 $p > 1$ 的一个非常简单的证明。

设 $f \in C_0^\infty$。对于每个单位向量 ω，我们有

$$f(x) = -\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} f(x + r\omega)\mathrm{d}r.$$

因此，在以 x 为中心的单位球面上的积分我们能得到

$$|f(x)| \lesssim \int \frac{|Df(y)|}{|x-y|^{n-1}}\mathrm{d}y = (|\cdot|^{1-n} * |Df|)(x)$$

取 L^q 范数，应用 (2.2.10) 得不等式

$$\|f\|_{L^q} \lesssim \||\cdot|^{1-n} * |Df|\|_{L^q} \lesssim \|Df\|_{L^p}.$$

当 $p > 1, 1 - \frac{n-1}{n} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$ 时成立.

注 2.2.4 Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式有一个等价的双线性公式，它就是

$$\int\int \frac{f(x)g(y)}{|x-y|^\gamma}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \lesssim \|f\|_{L^{p_1}}\|g\|_{L^{p_2}},$$

对 $0 < \gamma < n$, 以及 $1 < p_1, p_2 < \infty$, 使得

$$\frac{1}{p_1'} + \frac{1}{p_2'} = \frac{\gamma}{n}.$$

从 Fourier 变换我们看到带有像 $|\cdot|^{-\gamma}$ 这样的齐次核的卷积，实际上对应于分数次积分的算子，即 Laplace 算子 $-\Delta$ 的负指数，由下式定义

$$I_\alpha f = (-\Delta)^{-\alpha/2} f = \mathcal{F}^{-1}(|\xi|^{-\alpha}\hat{f}(\xi)).$$

下面的命题说明当 $0 < \alpha < n$ 时，I_α 是一个有意义的算子，$I_\alpha f \simeq |\cdot|^{\alpha-n} * f$，则定理 *2.2.2* 是说

$$\|I_\alpha f\|_{L^q} \lesssim \|f\|_{L^p}, \ \frac{\alpha}{n} + \frac{1}{q} = \frac{1}{p}.$$

作为一个即刻的应用，我们能考虑 Poisson 方程 $\Delta u = f, f \in L^p$。如果 $1 < p < n/2$, 则对 Laplace 求逆，我们发现 $u = -I_2 f = (-\Delta)^{-1} f$ 是一个在 L^q 中的解，$\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{2}{n}$。

命题 2.2.1 设 $0 < \alpha < n$, 则

$$\mathcal{F}(|x|^{\alpha-n})(\xi) = C(\alpha, n)|\xi|^{-\alpha}$$

在缓增分布的意义下成立。

证明 对于 $0 < \alpha < n$, 函数 $|x|^{\alpha-n}$ 和 $|\xi|^{-\alpha}$ 是局部可积的且在无穷远处衰减，因此，它们是有意义的缓增分布。我们要验证存在一个常数 $C(\alpha, n)$ 使得

$$\int |x|^{\alpha-n}\hat{\phi}(x)\mathrm{d}x = C(\alpha, n)\int |\xi|^{-\alpha}\phi(\xi)\mathrm{d}\xi \tag{2.2.11}$$

对每个试验函数 $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 成立。

众所周知, Gaussian 函数的 Fourier 变换

$$\mathcal{F}(\mathrm{e}^{-\frac{\lambda|x|^2}{2}})(\xi) = C_n \lambda^{-n/2} \mathrm{e}^{-\frac{|\xi|^2}{2\lambda}}.$$

由 Parsevel 等式, 对试验函数 ϕ 我们有

$$\int_{\mathbb{R}_n} \mathrm{e}^{-\frac{|\xi|^2}{2}} \hat{\phi}(x)\mathrm{d}x = C_n \lambda^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-\frac{|\xi|^2}{2\lambda}} \phi(\xi)\mathrm{d}\xi.$$

用 λ 的一个指数, 如 $\lambda^{\beta-1}$ 乘方程两边, 关于 λ 积分

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \lambda^\beta \mathrm{e}^{-\frac{|\xi|^2}{2}} \hat{\phi}(x)\mathrm{d}x \frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda} = C_n \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \lambda^{\beta-n/2} \mathrm{e}^{-\frac{|\xi|^2}{2\lambda}} \phi(\xi)\mathrm{d}\xi \frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda}.$$

设 $0 < \beta < n/2$, 等式两边均可积, 我们能用 Fubini 定理。在右端用代换 $\lambda \to \lambda^{-1}$, 关于 λ 两个积分能用 Γ 函数来表示, $\Gamma(z) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t} t^z \frac{\mathrm{d}t}{t}$, 我们得到

$$2^\beta \Gamma(\beta) \int_{\mathbb{R}^n} (\frac{|x|^2}{2})^{-\beta} \hat{\phi}(x)\mathrm{d}x = C_n 2^{\frac{n}{2}-\beta} \Gamma(\frac{n}{2} - \beta) \int_{\mathbb{R}^n} (\frac{|x|^2}{2})^{\beta-\frac{n}{2}} \phi(\xi)\mathrm{d}\xi.$$

最后, 令 $\beta = (n-\alpha)/2$, 我们得到 (2.2.11)。

§2.3 局部化方法与不确定性原理

分析中的一个基本概念是局部化, 将一个函数限制在一个物理空间或频率空间的一个适当小的部分, 然后通过单位分解恢复到原来的函数就是所谓的局部化方法。这样处理的一个基本理由是: 人们很难将函数的各种不同的特征和起来一同处理, 若将各个特征分别处理好了, 然后再合起来就会比较方便。局部化的方法很多, 研究者往往根据不同的需要而作出不同的单位分解, 具有很大的自由度, 并没有所谓的 “最好” 的方式。

2.3.1 局部化方法

物理空间的局部化是我们常用的, 以一维为例, 如果我们要将一个函数 $f(x)$ 局部化到物理空间中的一个区间 I, 最简单的方法是用截断函数 $\chi_I(x)$, 即 I 上的特征函数去乘 $f(x)$ 得到函数在区间上 I 的限制 $\chi_I(x)f(x)$。或我们能取一个支集在 I 上的 C_0^∞ 函数 $\tilde{\chi}_I(x)$, 使得在 I 的 1/3 区间内取值为 1, 满足导数的界的估计

$$|\mathrm{D}^\alpha \tilde{\chi}_I(x)| \le C|I|^{-j}, \ |\alpha| = j.$$

对于 $j \ge 0$ 成立, 这里的常数 C 依赖于 j。用 $|I|$ 记 I 的长度, 则光滑截断由 $\tilde{\chi}_I(x)f(x)$ 给出。虽然截断函数的选取是几乎不重要的, 但在许多情形光滑截断比粗糙的好。例如, 它能保持可微性。

频率空间的局部化的概念是同等重要的，在频率空间中给出一个区间 I, 我们能用一个粗糙的截断 Π_I :

$$\widehat{\Pi_I f}(\tau) = \chi_I(\tau)\hat{f}(\tau).$$

即，取 Fourier 变换限制到 I, 然后解除 Fouier 变换或一个光滑截断 $\tilde{\Pi}_I$:

$$\widehat{\tilde{\Pi}_I f}(\tau) = \tilde{\chi}_I(\tau)\hat{f}(\tau)$$

定义。这些算子是 Fourier 乘子的例子，一个 Fourier 乘子 T 是形如 $\widehat{Tf}(\tau) = m(\tau)\hat{f}(\tau)$ 的公式定义的算子，其中的函数 $m(\tau)$ 称为是乘子 T 的象征。物理空间的乘子可以由更直接的方式 $Tf(x) = m(x)f(x)$ 给出。使用 Fourier 变换的基本事实，我们能将 T 写成一个卷积算子

$$Tf(x) = f * K = \int f(x-\xi)K(\xi)\mathrm{d}\xi$$

的形式，其中 $K(x) = \check{m}(x) = \int \mathrm{e}^{ix\xi}m(\xi)\mathrm{d}\xi$。显然恒等算子是象征为 1 的 Fourier 乘子。导算子 ∂ 是象征为 $i\xi$ 的乘子。更一般地，任何微分算子 $P(\partial)$ 是以多项式 $P(i\xi)$ 为象征的乘子。分数次的微分、积分算子 $|\nabla|^\alpha, \langle\nabla\rangle^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$, 分别是以 $|\xi|^\alpha, \langle\xi\rangle^\alpha$ 为象征的 Fourier 乘子。

对于 $I = [-1,1]$ 上的粗糙截断 Π_I, 其核是由如下正弦函数给出的 Fourier 乘子:

$$K(x) = \int \mathrm{e}^{ix\xi}\chi_I(\xi)\mathrm{d}\xi = \frac{2\sin x}{x}. \tag{2.3.1}$$

而对于光滑截断 $\widetilde{\Pi_I}$, 其核是

$$\tilde{K}(x) = \int \mathrm{e}^{ix\xi}\widetilde{\chi_I}(\xi)\mathrm{d}\xi. \tag{2.3.2}$$

2.3.2 不确定性原理

比较粗糙截断和光滑截断的核 $K(x)$ 与 $\tilde{K}(x)$, 我们发现当 $x \to \infty$ 时，虽然它们都是衰减的，但 $K(x)$ 非常的缓慢，而 $\tilde{K}(x)$ 则是快速的。事实上，当 $|x| >> 1$ 时，我们可以利用位相 $e^{ix\xi}$ 快速振荡，通过分部积分得到如下的不等式

$$|\tilde{K}(x)| \lesssim |x|^{-j}$$

对于所有的 j 成立。以上的事实说明利用 Fourier 变换将频率空间的局部化不可避免地引起物理空间的局部化的丢失，反过来也对。所谓的不确定性原理大致上可以说成：如果一个测度 μ 的支集在一个椭球

$$E = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \sum \frac{|(x-a)\cdot e_i|^2}{r_j^2} \leq 1\right\}$$

上，其中 $a \in \mathbb{R}^n$ 是 E 的中心。则在很多情形下人们可以在任何一个对偶的椭球（与 E 有相同的轴，但长度互为倒数）

$$E^* = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \sum r_j^2 |(x-b)\cdot e_i|^2 \leq 1\right\}$$

上将 $\hat{\mu}$ 看成是常数。最简单的严格叙述是下面的 Bernstein 不等式：

命题 2.3.1 *L^2 情形：设 $f \in L^2$, $\hat{f}$ 的支集在球 $B(0,R)$ 上，则 $f \in C^\infty$ 且*

$$\|D^\alpha f\|_{L^2} \leq (CR)^{|\alpha|}\|f\|_{L^2}.$$

L^p 情形：设 $f \in L^1 + L^2$, $\hat{f}$ 的支集在球 $B(0,R)$ 上，则对于任何的 α 和 $p \in [1,\infty)$,

$$\|D^\alpha f\|_{L^p} \leq (CR)^{|\alpha|}\|f\|_{L^p};$$

对于 $1 \leq p < q \leq \infty$

$$\|f\|_{L^q} \leq CR^{n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\|f\|_{L^p}.$$

Bernstein 不等式告诉我们：当频率局部化到 $B(0,R)$ 时，在付出了 R 的一个幂次的代价后，函数的可积性可以得到提高。这个命题的证明是简单的，对于 L^2 情形是 Plancherel 定理的一个推论，对于 L^p 情形只要注意到在命题条件的假设下存在一个 $\phi \in \mathcal{S}$, 使得 $\hat{\phi}$ 在 $B(0,1)$ 上为 1，记 $(\phi^{R^{-1}})\hat{}(\xi) = \hat{\phi}(R^{-1}\xi)$, 有等式 $f = \phi^{R^{-1}} * f$ 成立，然后利用 Young 不等式即可得到。对于球上的 Bernstein 不等式自然可以推广到椭球上

命题 2.3.2 *设 $f \in L^1 + L^2$, $\hat{f}$ 的支集在椭球 E 上，则*

$$\|f\|_{L^q} \lesssim |E|^{n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\|f\|_{L^p} \quad 1 \leq p \leq q \leq \infty.$$

对于逐点估计，粗糙地说，如果 $\mathrm{supp}\hat{f} \subset E$, 则对任何的对偶椭球 E^*, E^* 上的值由 E^* 上的平均值控制。细致地我们有

命题 2.3.3 *设 $f \in L^1 + L^2$, $\hat{f}$ 的支集在 E 中，则对任何对偶椭球 E^* 和 $z \in E^*$,*

$$|f(z)| \leq C_N \frac{1}{|E^*|}\int \phi_{E^*}|f(x)|\mathrm{d}x,$$

其中 ϕ_{E^*} 在 E^* 为 1 且快速下降地离开 E^*

$$\phi_{E^*}(x) = \left(1 + \sum_j \frac{|(x-k)\cdot e_j|^2}{r_j^2}\right)^{-N}.$$

证明 首先设 E 是一个单位球，E^* 也是，则 f 是它自身与一个固定的 Schwartz 函数 ψ 的卷积。

$$|f(z)| \leq \int |f(x)||\psi(z-x)|\mathrm{d}x \leq C_N \int |f(x)||(1+|z-x|^2)^{-N}|$$

$$\leq \quad C_N \int |f(x)|(1+|x|^2)^{-N},$$

这里用了 ψ 的界以及当 $|z| \leq 1$ 时, $1+|z-x|^2 \gtrsim 1+|x|^2$ 关于 x 是一致的。这就说明了要证的不等式成立。

设 E 的中心在原点, 但 E 和 E^* 是任意的, k 是 E^* 的中心, T 是从 E^*-k 到单位球上的一个自共轭线性映照。考虑 $g(x)=f(T^{-1}x+k)$, 其 Fourier 变换的支集在 $T^{-1}E$ 上, 如果 T 映 E^* 到单位球, 则 T^{-1} 映 E 到单位球。对应地, 如果 $y \in B(0,1)$,

$$|g(y)| \leq \int \phi(x)|g(x)|\mathrm{d}x$$

使得

$$f(T^{-1}z+k) \leq \int \phi(x)|f(T^{-1}x+k)|\mathrm{d}x = |\det T| \int \phi_{\phi_{E^*}}(x)|f(x)|\mathrm{d}x.$$

注意到 $|\det T| = |E^*|^{-1}$, 我们就得到结论。

注 2.3.1 *这个结论是 "带 Schwartz 尾巴" 的一个例子, 并不能得到更好的结论。如当 $x \in E^*$ 时 f 是由 E^* 的双倍上的 f 的平均来控制的界。即使在一维时 $E=E^*=$ 单位区间的情形也是如此。为此考虑一个固定的 Schwartz 函数 g, $g(0) \neq 0$, $\mathrm{supp} g = [-1,1]$, 取 $f_N(x) = \left(1-\frac{x^2}{4}\right)^N g(x)$。由于 $\hat{f}_N$ 是 $\hat{g}$ 的线性组合, 他们与 $\hat{g}$ 有相同的支集, 此外, 除原点外, 在 $[-1,1]$ 上它们有界且逐点收敛于 0。在原点 f_N 的值不能由 $[-2,2]$ 上的平均来控制的估计。*

以上的结论告诉我们, 不确定性原理也可以用如下的方式来解释. 考虑支集在 $B(0,2)$ 且在 $B(0,1)$ 中取值为 1 的光滑函数 ϕ, 对于 $\mathbb{R}^n$ 上的一个函数 f, 我们定义卷积 $\int_{\mathbb{R}^n} \hat{\phi}(y)f(x+y/R)\mathrm{d}y$, 注意到它的 Fourier 变换为 $(2\pi)^n\phi(\xi/R)\hat{f}(\xi)$, 我们可以视这样的算子是 f 在频率 $\leq O(R)$ 中的局部化。由于 $\hat{\phi}$ 是速降的且有单位质量, 我们也可将这样的算子看成是一个平均算子, 使得在物理空间中不能区分尺度远小于 $1/R$ 的 f, 因而可以认为是常数。

一个非常有用的局部化方法是如下的 Littlewood-Paley 分解

2.3.3 Littlewood-Paley 分解

考虑一个函数 $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ 使得当 $|\xi| \leq \frac{1}{2}$ 时, $\psi(\xi)=1$, 当 $|\xi| \geq 1$ 时, $\psi(\xi)=0$。定义 $\phi(\xi)=\psi(\frac{\xi}{2})-\psi(\xi)$, 则 ϕ 的支集在 $1/2 \leq |\xi| \leq 2$ 中。对所有的 ξ, 我们有

$$1=\psi(\xi)+\sum_{p\geq 0}\phi(2^{-p}\xi),$$

对于 $u \in \mathcal{S}'$, 我们令

$$u_{-1}=S_0u=\psi(D)u, \quad u_p=\phi(2^{-p}D)u$$

这样，我们可以定义非齐 Littlewood-Paley 分解

$$u = S_0 u + \sum_{p\geq 0} u_p.$$

记部分和 $S_p u = \sum_{q=-1}^{p-1} u_q$，每一项在 $\mathbb{C}$ 中是全纯的。这样，我们可以说明 u 的"品质"反映在 $\sum u_p$ 的收敛速度上。

这样的分解有下面的几乎正交性性质：

引理 2.3.1 对于任何的 $\xi \in \mathbb{R}^n$，

$$\frac{1}{3} \leq \psi^2(\xi) + \sum_{p\geq 0} \phi^2(2^{-p}\xi) \leq 1,$$

且对所有的 $u \in L^2$

$$\sum_{p\geq -1} \|u_p\|_{L^2}^2 \leq \|u\|_{L^2}^2 \leq 2\sum \|u\|_{L^2}^2.$$

证明 对于第一个等式，我们只要注意到

$$\psi^2(\xi) + \sum \phi^2(2^{-p}\xi) \leq [\psi(\xi) + \sum \phi^2(2^{-p}\xi)]^2 = 1$$

以及

$$1 \leq 3\left(\psi^2(\xi) + \sum_{p\geq 0} \phi^2(2^{-p}\xi)\right)$$

即可。

对于第二个等式，只要用 $|\hat{u}(\xi)|^2$ 去乘第一式的两边，再积分，并注意到 $\hat{u}_p(\xi) = \phi(2^{-p}\xi)\hat{u}(\xi)$ 和 $\hat{u}_{-1} = \psi(\xi)\hat{u}(\xi)$ 即可。

对于 $u, v \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$，容易验证，如果 $|p-q| \geq 2$，则 $(u_q)_p \equiv 0$，如果 $|p-q| \geq 5$，$(S_{p-1}uv_p)_q \equiv 0$。如果 $\{u_p\}$ 是 L^2 中的函数序列，且 $\mathrm{supp}\hat{u_p} \subset \{\xi, \frac{1}{C}2^{p-1} \leq |\xi| \leq C2^{p+1}\}$，$C > 1$，总有不等式

$$\|\sum u_p\|_{L^2}^2 \leq C\sum \|u_p\|_{L^2}^2.$$

命题 2.3.4 （关于导数的敏感性）存在与 p, u 无关的常数 C 使得

1. 对所有 $\alpha \in \mathbb{N}^n, p \geq -1$，

$$\|\partial^\alpha u_p\|_{L^2} \leq C2^{p|\alpha|}\|u\|_{L^2}, \qquad \|\partial^\alpha S_p u\|_{L^2} \leq C2^{|p\alpha|}\|u\|_{L^2}$$
$$\|\partial^\alpha u_p\|_{L^\infty} \leq C2^{p|\alpha|}\|u\|_{L^\infty}, \qquad \|\partial^\alpha S_p u\|_{L^\infty} \leq C^{p|\alpha|}\|u\|_{L^\infty},$$

2. 对于所有 $k \in \mathbb{N}, p \geq 0$，

$$\frac{1}{C}2^{pk}\|u\|_{L^\infty} \leq \sum_{|\alpha|=k} \|\partial^\alpha u_p\|_{L^\infty} \leq C2^{pk}\|u\|_{L^\infty}.$$

3. 对于所有 $s \in \mathbb{R}, p \geq 0$,

$$\frac{1}{C}2^{ps}\|u\|_{L^2} \leq \|u_p\|_{H^s} \leq C2^{ps}\|u\|_{L^2}.$$

用 ϕ_λ 记 $\phi(\dot{/}\lambda)$, 这样, 对 $\{\phi_\lambda\}_{\lambda\in 2^{\mathbb{Z}}}$, 用

$$(\Delta_\lambda f)^\wedge(\xi) = \phi_\lambda(\xi)\hat{f}(\xi)$$

定义二进乘子算子 Δ_λ, 以致于当 f 是一个缓增分布时有齐次二进分解 $f = \sum_\lambda \Delta_\lambda f$。对每个 λ 和 $p \in [1,\infty]$,$\Delta_\lambda = \phi(\lambda D)$ 是 L^p 到 L^p 的映照, 且

$$\|\Delta_\lambda f\|_{L^p} \leq C_p\|f\|_{L^p},$$

其中 C_p 并不依赖于 q, 这可来自于 Young 不等式, Δ_λ 是一个以 $\phi_\lambda^\vee$ 为核的卷积算子, 有伸缩不变性 $\|\phi_\lambda^\vee\|_{L^1} = \|\phi^\vee\|_{L^1}$.

定义平方函数作为非线性算子

$$Sf(x) = (\sum_\lambda |\Delta_\lambda f|^2)^{1/2}.$$

其主要结果是 Sf 和 f 在 L^p 中是可比较的.

定理 2.3.1 对每个 $1 < p < \infty$, 存在一个常数 C_p, 使得对所有 $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ 我们有

$$C_p^{-1}\|f\|_{L^p} \leq \|Sf\|_{L^p} \leq C^p\|f\|_{L^p}. \tag{2.3.3}$$

证明 首先使用对偶性讨论我们说明 (2.3.3) 中的第一个不等式来自于第二个。事实上, 使用 Plancherel 定理, 除非 $\lambda \approx \mu$, 否则 $\phi_\lambda\phi_\mu = 0$, 由 Cauchy-Schwartz 不等式, 我们得到

$$\begin{aligned}
\int f(x)g(x) \simeq \int \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi) &= \int \sum_{\lambda\mu} \widehat{\Delta_\lambda f}\widehat{S_\mu g}\mathrm{d}\xi \\
\simeq \ & \int \sum_{\lambda\approx\mu} \Delta_\lambda f(x) S_\mu g(x)\mathrm{d}x \\
\lesssim \ & \int (\sum |\Delta_\lambda f(x)|^2)^{1/2}(\sum |S_\mu g(x)|^2)^{1/2}\mathrm{d}x \leq \|Sf\|_{L^p}\|Sg\|_{L^{p'}} \\
\leq \ & C_p\|Sf\|_{L^p}\|g\|_{L^{p'}}.
\end{aligned}$$

为了证明 (2.3.3) 中留下来的不等式, 我们需要引进定义在 $\mathbb{R}$ 上的 Rademacher 函数 $r_\lambda(t)$: 对于每个 $\lambda > 0$ 和 $t \in \mathbb{R}$, 令 $r_\lambda(t) = r_0(\lambda t)$, 其中 $r_0(t)$ 是周期函数, $r_0(t+1) = r_0(t)$, 使得对于 $0 \leq t < 1/2$, $r_0(t) = 1$; 和对于 $1/2 \leq t < 1$, $r_0(t) = -1$. 这些 Rademcher 函数在 $L^2[0,1]$ 中形成一个正交序列且它们形成一个均匀分布的独立的随机变量序列。我们所需的基本性质是 Rademacher 函数的线性组合的 L^p 范数等价于其系数的 l^2 范数。

引理 2.3.2 给定一个正数序列 $\{a_k\}$ 满足 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k^2 < \infty$, 定义

$$F(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k r_{2^k}(t),$$

则 $F \in L^2([0,1]), \|F\|_{L^2} = (\sum_{k=0}^{\infty} a_k^2)^{1/2}$ 。此外, 对 $1 < p < \infty$, $F \in L^p([0,1])$, 且存在常数 A_p, 使得

$$A_p^{-1}\|F\|_{L^p} \le \|F\|_{L^2} \le A_p\|F\|_{L^p}.$$

定义 2.3.1 $L_t f(x) = \sum_{\lambda \le 1} r_{1/\lambda}(t)\Delta_\lambda f(x), H_t f(x) = \sum_{\lambda > 1} r_\lambda(t)\Delta_\lambda f(x)$.

引理 2.3.2 给出了下面的函数逐点的界

$$Sf(x) \lesssim A_p \left(\int_0^1 |L_t f(x)|^p \mathrm{d}t\right)^{1/p} + A_p \left(\int_0^1 |H_t f(x)|^p \mathrm{d}t\right)^{1/p}. \tag{2.3.4}$$

注意到在频率空间中的算子 L_t 是由乘子

$$m_t(\xi) = \sum_{\lambda \le 1} r_{1/\lambda}(t)\phi_\lambda(\xi)$$

给出的。对于 $\xi \ne 0$, 这个和式中仅有三项非零, 且容易说明

$$|\partial_\xi^\alpha m_t(\xi)| \le C_\alpha |\xi|^{-|\alpha|},$$

其中常数 C_α 与 t 无关。这样, 由 Calderon-Zygmund 理论,

$$\|L_t f\|_{L^p} \le C_p \|f\|_{L^p},$$

其中常数 C_p 与 t 无关。类似地可以得到

$$\|H_t f\|_{L^p} \le C_p \|f\|_{L^p}.$$

最后, Minkowski 不等式给出

$$\|Sf\|_{L^p} \le A_p \left(\int_0^1 \|L_t f\|_{L^p}^p \mathrm{d}t\right)^{1/p} + A \left(\int_0^1 \|H_t f\|_{L^p}^p \mathrm{d}t\right)^{1/p} \le C_p \|f\|_{L^p}.$$

显然,

$$\|f\|_{L^2}^2 = \sum_\lambda \|\Delta_\lambda f\|_{L^2}^2. \tag{2.3.5}$$

下面的定理 2.3.1 的推论告诉我们, 在 (2.3.5) 中如何用 L^p 范数取代 L^2 范数。

推论 2.3.1 对于 $2 \le p < \infty$ 我们有

$$\|f\|_{L^p}^2 \le C_p \sum_\lambda \|\Delta_\lambda f\|_{L^p}^2 \tag{2.3.6}$$

对于 $1 < p \le 2$ 我们有

$$\sum_\lambda \|\Delta_\lambda f\|_{L^p}^2 \le C_p \|f\|_{L^p}^2. \tag{2.3.7}$$

证明 如果 $p/2 \geq 1$, 由 定理 2.3.1 和 Minkowski 不等式我们有

$$\|f\|_{L^p}^2 \leq C_p \|\sum |\Delta_\lambda f|^2\|_{L^{p/2}} \leq C_p \sum \||\Delta_\lambda f|^2\|_{L^{p/2}} = C_p \sum \|\Delta_\lambda f\|_{L^p}^2.$$

逆 Minkowski 不等式是说对于 $0 < q \leq 1$,

$$\|\sum |\phi_\lambda|\|_{L^q} \geq \sum \|\phi_\lambda\|_{L^q}. \tag{2.3.8}$$

为证 (2.3.8), 设 $p = \frac{1}{q} \geq 1$ 和 $\psi_\lambda = |\phi_\lambda|^q$。则用标准的 Minkowski 不等式我们有

$$(\sum \|\phi_\lambda\|_{L^q})^q = (\sum (\int |\psi_\lambda| \mathrm{d}x)^p)^{1/p} = \int (\sum |\psi_\lambda|^p)^{1/p} = \|\sum |\phi_\lambda|\|_{L^q}^q.$$

§2.4 稳定位相法

设 ϕ 是实值函数, $a \in C_0^\infty$, 考虑积分

$$I(t) = \int \mathrm{e}^{it\phi(x)} a(x) \mathrm{d}x, \ t > 0.$$

我们的目的是讨论当 $t \to +\infty$ 时, $I(t)$ 的性态。

首先我们容易看到, $|I(t)|$ 可由仅依赖于 a 的常数来控制。但我们希望积分式当 $t \to \infty$ 时有衰减性。如果 ϕ 是常数, 显然积分与 t 无关。这样我们需要对 ϕ 作非退化的假设。相比之下对 a 的性质并没有如此重要。我们可以对 a 作单位分解, 将研究 $I(t)$ 的衰减性问题"局部化"到在一个点附近来探讨即可。$I(t)$ 的衰减性在"微分同胚"下是不变的。这是由于设 G 是一个微分同胚 $\phi_1 = \phi_2 \circ G$, 则

$$\begin{aligned}
\int \mathrm{e}^{it\phi_2(x)} a(x) \mathrm{d}x &= \int \mathrm{e}^{it\phi_1(G^{-1}x)} a(x) \mathrm{d}x \\
&= \int \mathrm{e}^{it\phi_1(y)} a(Gy) \mathrm{d}(Gy) \\
&= \int \mathrm{e}^{it\phi_1(y)} a(Gy) |J_G(y)| \mathrm{d}y,
\end{aligned}$$

其中 J_G 是 Jacobian 行列式, 函数 $a(Gy)|J_G(y)| \in C_0^\infty$。

我们知道一个函数在正则点或临界点附近可以将其规范化。具体地说: 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是一开集。$f : \Omega \to \mathbb{R}$ 的 C^∞ 函数, $p \in \Omega$ 且 $\nabla f(p) \neq 0$, 则在 O 点和 p 点附近存在邻域 U, V 以及一个 C^∞ 微分同胚 $G : U \to V$ 满足 $G(O) = p$ 和 $f \circ G(x) = f(p) + x_n$。如果 $\nabla f(p) = 0$, Hessian 阵 $H_f(p) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p)\right)$ 可逆。则对于 H_p 的正特征根个数 k 存在 O 和 p 的邻域 U 和 V 以及 C^∞ 微分同胚 $G : U \to V$ 满足 $G(O) = p$ 且

$$f \circ G(x) = f(p) + \sum_{j=1}^{k} x_j^2 - \sum_{j=k+1}^{n} x_j^2.$$

定理 2.4.1 (**非稳定位相情形**) 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是开集, $\phi : \Omega \to \mathbb{R}$ 是 C^∞ 函数, $p \in \Omega, \nabla\phi(p) \neq 0$。设 $a \in C_0^\infty$ 其支集在 p 的一个充分小的邻域中, 则对任意的 N 存在 C_N 使得 $|I(t)| \leq C_N t^{-N}$, 常数 C_N 仅依赖于 ϕ 和 a 的有限多阶导数以及 $|\nabla\phi(p)|$ 的下界和 N。

事实上在这种情形, $\phi(x)$ 可以拉直到 $\phi(x) = x_n + C$, 且令 $e_n = (0, \cdots, 1)$ 我们有

$$I(t) = \int e^{itx_n} a(x) dx$$

注意到 a 的假设我们即可得到结论。

定理 2.4.2 (**非退化临界点情形**) 设 T 是一实对称可逆矩阵, $a \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ 或 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$。定义

$$I(t) = \int e^{i\frac{t}{2}\langle Tx, x\rangle} a(x) dx,$$

则对任何 N,

$$I(t) = e^{i\mathrm{sgn}T\frac{\pi}{a}} \left(\frac{2\pi}{t}\right)^{n/2} |\det T|^{1/2} \left(a(x) + \sum_{j=1}^{N} t^{-j} \mathcal{D}_j a(x) + O(t^{-(N+1)}) \right).$$

其中 $\mathcal{D}_j$ 是一 $2j$ 阶常系数齐次微分算子, 仅依赖于 T, 隐含的常数仅依赖于 T 以及 a 的有限多个 Schwartz 空间半范的界。

证明 注意到 T 是 $\mathbb{R}^n$ 中可逆的对称阵, 则 $e^{i\langle Tx,x\rangle/2}$ 的 Fourier 变换为

$$(2\pi)^{-n/2} |\det T|^{-1/2} e^{i\mathrm{sgn}T\frac{\pi}{4}} e^{-\frac{i}{2}\langle T^{-1}\xi, \xi\rangle}.$$

由 Paseval 公式

$$I(t) = (2\pi t)^{-n/2} |\det T|^{-1/2} e^{i\mathrm{sgn}T\frac{\pi}{4}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{i}{2t}\langle T^{-1}\xi, \xi\rangle} \hat{a}(\xi) d\xi.$$

用 e^{ix} 的 Taylor 展开式得下式关于 ξ 和 t 一致地有

$$e^{-\frac{i}{2}\langle T^{-1}\xi, \xi\rangle} = \sum_{j=0}^{N} \frac{(-\frac{i}{2t}\langle T^{-1}\xi, \xi\rangle)^j}{j!} + O\left(\frac{|\xi|^{2N+2}}{t^{N+1}}\right),$$

对应的

$$\begin{aligned} \int \hat{a}(\xi) e^{-\frac{i}{2t}\langle T^{-1}\xi, \xi\rangle} d\xi &= \int \hat{a}(\xi)(1 + \sum_{j=1}^{N} \frac{(-\frac{i}{2t}\langle T^{-1}\xi, \xi\rangle)^j}{j!}) d\xi \\ &+ O\left(\int |\hat{a}(\xi)| \frac{|\xi|^{2N+2}}{t^{N+1}}\right). \end{aligned}$$

注意到由逆变换公式 $\int \hat{a} d\xi = a(0)$, 类似地

$$\int |\hat{a}(\xi)||\xi|^{2N+2} d\xi$$

是 $\mathcal{D}_j a$ 在 0 点的值。由于 $\int |\hat{a}(\xi)||\xi|^{2N+2} d\xi$ 关于 $\hat{a}$ 的 Schwartz 空间半范是有界的, 因此 a 的各阶导数也是。这就得到结论。

§2.5 Sobolev 空间

我们知道整数次的 Sobolev 空间是按如下方式定义的：对于非负整数 m，$1 \le p \le \infty$ 以及开集 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$，Sobolev 空间 $W^{m,p}(\Omega)$ 是 $L^p(\Omega)$ 中使得对所有弱导数 $\mathrm{D}^\alpha u \in L^p(\Omega), |\alpha| \le m$，的函数组成的空间。这是一个赋范空间，其范数为 $\|u\|_{m,p} = \sum_{|\alpha|\le m} \|\mathrm{D}^\alpha u\|_p$ 或等价地 $\|u\|_{m,p} = \left(\int_\Omega (\sum_{|\alpha|\le m} |\mathrm{D}^\alpha u|^p) dx\right)^{1/p}, 1 \le p \le \infty$. $W^{m,p}(\Omega)$ 对于 $1 \le p \le \infty, m \ge 0$，是一个 Banach 空间。$p=2$ 时，记 $W^{m,2}$ 为 $H^m(\Omega)$ 是一个 Hilbert 空间。其内积为 $(u,v) = \sum_{|\alpha|\le m|} \int_\Omega \mathrm{D}^\alpha u \overline{\mathrm{D}^\alpha u} \mathrm{d}x$.

对于 $1 \le p < \infty, m \ge 0$，$C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ 在 $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ 中稠；$p = \infty$，$C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ 在 $W^{m,\infty}(\mathbb{R}^n)$ 中弱 $*$ 稠。对于每个有限的 q，这样的序列在 $L^q_{loc}(\mathbb{R}^n)$ 中是强收敛的。

$C_0^\infty(\Omega)$ 一般不在 $W^{m,p}(\Omega)$ 中稠，定义 $W_0^{m,p}(\Omega)$ 是 $C_0^\infty(\Omega)$ 在 $W^{m,p}(\Omega)$ 中的闭包。

$W^{m,p}_{loc}(\Omega), 1 \le p \le \infty, m \ge 0$，是使得对每个 $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ 有 $\phi T \in W^{m,p}(\Omega)$ 的分布 $\mathcal{D}'(\Omega)$ 组成的空间。它不是一个 Banach 空间，是 Fréchet 空间。

$W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n) = C^{0,1}(\mathbb{R}^n)$. 如果 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个开集，则 $C^{0,1}(\Omega) \subset W^{1\infty}(\Omega)$，且 $W^{1,\infty}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega) \cap C^{0,1}_{loc}(\Omega)$. 其中 $C^{0,1}_{loc}(\Omega)$ 是局部 Lipschitz 函数的 Fréchet 空间。如果 $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$，$\|\nabla u\|_{L^\infty} \le K$. 则 $|u(x) - u(y)| \le K \mathrm{d}_\Omega(x,y)$，其中 d_Ω 是 Ω 中从 x 到 y 的测地距离。

如果 s 是实数，则可以用 Fourier 变换来等价地定义 Sobolev 空间，如可以定义 $H^s(\mathbb{R}^n) = \{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n), (1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)\}$。$H^{-s}(\mathbb{R}^n)$ 是 $H^s(\mathbb{R}^n)$ 的对偶，但对开集 Ω 的记号是不同的，对于 $\mathbb{R}^n$ 中的开集 Ω，正整数 m，记 $H^{-m}(\Omega)$ 为 $H_0^m(\Omega)$ 的对偶。

对于 $0 < s < 1$，$u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ 等价于 $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$，

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y < \infty.$$

事实上，对 $h \in \mathbb{R}^n$，有 $(\tau_h u)\hat{}(\xi) = \mathrm{e}^{ih\xi}\hat{u}(\xi)$，因此

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\tau_h u - u|^2 \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} |1 - \mathrm{e}^{ih\xi}|^2 |\hat{u}|^2 \mathrm{d}\xi,$$

注意到 $|1 - \mathrm{e}^{i\alpha}|^2 = 4\sin^2\frac{\alpha}{2}$，

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|h|^{n+2s}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\tau_h u - u|^2 \mathrm{d}x\right) \mathrm{d}h = \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{u}(\xi)|^2 \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{4\sin^2((h\cdot\xi)/2)}{|h|^{n+2s}} \mathrm{d}h\right) \mathrm{d}\xi.$$

对于 $\xi \ne 0$，为计算 $\int_{\mathbb{R}^n} \frac{4\sin^2((h\cdot\xi)/2)}{|h|^{n+2s}} \mathrm{d}h$，用旋转不变性，以及变量变换 $h = |\xi| z$ 可得 $|\xi|^{2s} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{4\sin^2(z_1/2)}{|z|^{n+2s}} \mathrm{d}z$。由于在原点附近的 z 和 $s < 1$，有 $|\sin(z_1/2)| \le |z|$；对于大的 z 用 $|\sin(z_1/2)| \le 1$ 和 $s \ge 0$，知 $C = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{4\sin^2(z_1/2)}{|z|^{N+2s}} \mathrm{d}z$ 是有限的，这样

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = C \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2s} |\hat{u}|^2 \mathrm{d}\xi < \infty.$$

对于实数次的 Sobolev 空间我们也可以通过插值来定义。如对于 $0 < s < 1$, $1 \le p \le \infty$, $W^{s,p}(\mathbb{R}^n) = (W^{1,p}(\mathbb{R}^n), L^p(\mathbb{R}^n))_{1-s,p}$。对于 $s > 1$ 情形，如果 k 是一个正整数，使得 $k < s < k+1$，我们至少有两种方式来定义 $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$：一是 $u \in W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$，且对于 $|\alpha| = k$, $\partial^\alpha u \in W^{s-k,p}(\mathbb{R}^n)$；另一是 $(W^{m,p}(\mathbb{R}^n), L^p(\mathbb{R}^n))_{\theta,p}$, $(1-\theta)m = s$。

2.5.1 Sobolev 不等式

定理 2.5.1 (Sobolev 嵌入) *i)* 对于 $1 \le p < \frac{n}{m}$，则 $W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \subset L^q(\mathbb{R}^n)$, $1/q = 1/p - m/n, m \in \mathbb{N}$ 且不等式

$$\|f\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|D^m f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \tag{2.5.1}$$

成立。但 $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ 不是当 $r > q$ 时的 $L^r(\mathbb{R}^n)$ 的子空间。

ii) 对于 $p = \frac{n}{m}$, $W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \subset L^q(\mathbb{R}^n), q \in [p, \infty)$，但如果 $p > 1$, $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ 不是 $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 的一个子空间；然而 $W^{n,1}(\mathbb{R}^n) \subset C_0(\mathbb{R}^n)$。

iii) 对于 $p > \frac{n}{m}$ 时我们有 $W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \subset C_0(\mathbb{R}^n)$。

$$\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \lesssim \sum_{k=0}^{m} \|D^k f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \tag{2.5.2}$$

成立。如果存在一个整数 k 使得 $\frac{n}{k} < p < \frac{n}{k-1}$，则 $W^{k,p} \subset C^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)$, $\gamma = k - \frac{n}{p}$。

注 2.5.1 不等式 (2.5.1) 要满足的指标关系式 $1/q = 1/p - m/n$ 可以通过简单的标尺平衡分析得到。由于这个估计是齐次的，它在伸缩变换下是不变的，这个指标关系式可以简单地认为 (2.5.1) 的两边有相同的标尺度。但这不是证明，因为 $\|u\|_\infty \le \|Du\|_{L^n}$ 由标尺度的平衡来看并不矛盾，但当 $n > 1$ 时不对！

注 2.5.2 从 Sobolev 嵌入定理及简单的插值我们立刻就有：对于 $1 \le p < n$, $W^{1,p} \subset L^{p^*}(\mathbb{R}^n)$, $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$，或 $p^* = \frac{np}{n-p}$. 我们能得到 $W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \subset L^q(\mathbb{R}^n)$, $q \in [p, p^*]$。

这也可以从简单的标尺度平衡看的这一点。事实上，对于 $\lambda > 0$，我们将不等式 $\|u\|_q \le C\|u\|_p + C\|Du\|_p$ 应用到 $v(x) = u(x/\lambda)$。注意到对于 $1 \le r \le \infty$, $\|v\|_r = \lambda^{n/p}\|u\|_r$，如果不等式是对的，将有

$$\lambda^{n/q}\|u\|_q \le C\lambda^{n/p}\|u\|_p + C\lambda^{-1+n/p}\|u\|_p.$$

即

$$\|u\|_q \le C\lambda^{n/p}\|u\|_p + C\lambda^{-1+n/p}\|u\|_p.$$

如果 $\alpha > 0, \beta > 0$，则令 $\lambda \longrightarrow 0$，这将导致对所有的 $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ $\|u\|_q = 0$. 矛盾。这就对应到 $q < p$ 的情形。类似地，如果 $\alpha < 0, \beta < 0$，令 $\lambda \longrightarrow \infty$ 导致矛盾。这对应于 $q > p^*$。

为介绍方法，我们给出 (2.5.1) 的证明。

对 $m>1$ 的情形我们可以对 $m=1$ 的情形的重复叠代得到。因此，我们可以设 $m=1$，由指标关系式

$$1\leq p<n, \frac{n}{n-1}\leq q=\frac{np}{n-p}<\infty.$$

一旦我们有对 $p=1$ 和 $q=\frac{n}{n-1}$ 的估计，则通过应用 Hölder 不等式就能得到 $p>1$ 和 $q>\frac{n}{n-1}$ 的估计。事实上，对某个 $\lambda>1$ 令 $q=\frac{\lambda n}{n-1}$，则

$$\|f\|_{L^q}^{\lambda}=\||f|^{\lambda}\|_{L^{\frac{n}{n-1}}}\lesssim\||f|^{\lambda-1}\mathrm{D}f\|_{L^1}\leq\||f|^{\lambda}\|_{L^{p'}}\|\mathrm{D}f\|_{L^p},$$

我们只要验证

$$(\lambda-1)p'=\frac{\frac{n-1}{n}q-1}{1-\frac{1}{n}-\frac{1}{q}}=q.$$

剩下来我们仅需验证 $m=1,p=1,p=n/(n-1)$ 的特殊情形。由 Hölder 不等式，我们将说明对于 $f\in C_0^{\infty}$，我们有

$$\|f\|_{L^{\frac{n}{n-1}}(R^n)}\lesssim\prod_{j=1}^{n}\|\partial_j f\|_{L^1(R^n)}^{1/n} \tag{2.5.3}$$

当 $n=1$ 时，这来自于

$$f(x)=\int_{-\infty}^{x}f'(y)\mathrm{d}y.$$

当 $n\geq 2$ 时我们对 n 用归纳法，对于 $n=2$ 我们知道

$$\begin{aligned}\int\int|f(x_1,x_2)|^2\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 &\leq \int\int\int|\partial_1 f(y_1,x_2)|\mathrm{d}y_1\int|\partial_2 f(x_1,y_2)|\mathrm{d}y_2\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\\ &= \|\partial_1 f\|_{L^1}\|\partial_2 f\|_{L^1}.\end{aligned}$$

对于 $i=1,\cdots,n-1$，令 $g_i=\left(\int_{\mathbb{R}}|f_i|^{n-1}\mathrm{d}x_n\right)^{1/n-2}$，使得 g_i 与 x_i,x_n 无关，且关于剩下的 $n-2$ 个变量 $g\in L^{n-2}$，满足 $\|g_i\|_{n-2}\leq\|f_i\|_{n-1}^{(n-1)/(n-2)}$。由归纳假设 $G=\Pi_{i=1}^{n-1}g_i\in L^1(\mathbb{R}^{n-1})$，Hölder 不等式

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\int_{\mathbb{R}}|f|dx_n\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_{n-1} &\leq \int_{\mathbb{R}^{n-1}}\prod_{i=1}^{n-1}g_i^{(n-2)/(n-1)}f_n\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_{n-1}\\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}}G^{(n-2)/(n-1)}f_n\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_{n-1}\\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}}|G|\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_{n-1}\right)^{(n-2)/(n-1)}\|f_n\|_{n-1}\\ &\leq \prod_{i=1}^{n}\|f_i\|_{n-1}.\end{aligned}$$

下面我们介绍一个推广了的 Sobolev 不等式。

命题 2.5.1 设 $1 \le p < \infty$, $q < n$ 满足 $0 \le q \le p$, 则对每一个 $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ 有 $\frac{|u(x)|^p}{|x|^p} \in L^1(\mathbb{R}^n)$。并且, 对于每个 $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ 成立

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x)|^p}{|x|^q} \mathrm{d}x \le \left(\frac{p}{n-q}\right)^q \|u\|_{L^p}^{p-q} \|\nabla u\|_{L^p}^q.$$

证明 由稠密性和 Fatou 引理, 我们只要对于 $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ 证明上述不等式。令 $y(x) = |x|^{-q}x$。我们有 $\nabla \cdot y = (n-q)|x|^{-q}$。在 $\{x \in \mathbb{R}^n; |x| > r > 0\}$ 上积分如下等式

$$|u|^p \nabla \cdot y = \nabla \cdot (|u|^p y) - p|u|^{p-1} y \cdot \nabla |u|$$

得

$$(n-q) \int_{|x|>r} \frac{|u(x)|^p}{|x|^q} \mathrm{d}x \le p \int_{|x|>r} \frac{|u(x)|^{p-1} |\nabla u(x)|}{|x|^{q-1}} \mathrm{d}x$$

应用 Hölder 不等式,

$$(n-q) \int_{|x|>r} \frac{|u(x)|^p}{|x|^q} \mathrm{d}x \le p \left(\int_{|x|>r} \frac{|u(x)|^{p-1} |\nabla u(x)|}{|x|^{q-1}} \mathrm{d}x \right)^{\frac{q-1}{q}} \|u\|_{L^p}^{\frac{p-q}{q}} \|\nabla u\|_{L^p}.$$

由于 $r > 0$ 是任意的, 不等式得证。

从上面的结论以及证明我们还有

推论 2.5.1 如果 $n \ge 4$, 则对于每个 $u \in H^2(\mathbb{R}^n)$ 有 $\frac{|u(x)|^2}{|x|^3} \in L^1(\mathbb{R}^n)$, 且存在 C 使得对于每个 $u \in H^2(\mathbb{R}^n)$ 有

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x)|^2}{|x|^3} \mathrm{d}x \le C \|u\|_{H^2}^2$$

成立。

在应用中常常会遇到用差商逼近来研究弱导数。在它们之间我们有

设 U 是 $\mathbb{R}^n$ 中的具 C^1 边界的有界开区域, $V \subset\subset U$。对于 $x \in V$ 和 $h \in \mathbb{R}$, $0 < |h| < \mathrm{dist}(V, \partial U)$, 我们定义差商算子 $D^h u = (D_i^h u, \cdots, D_n^h u)$, 其中

$$D_i^h u(x) = \frac{u(x + he_i) - u(x)}{h}, \quad i = 1, \cdots, n.$$

定理 2.5.2 设 $u \in W^{1,p}(U)$, $1 \le p < \infty$。则对于 $V \subset\subset U$ 存在常数 C, 对于所有的 $0 < h < \frac{1}{2}\mathrm{dist}(V, \partial U)$, 我们有

$$\|D^h u\|_{L^p(V)} \le C \|Du\|_{L^p(U)}.$$

反过来, 如果 $u \in L^p(V)$, $1 < p < \infty$, 存在常数 C 使得 $\|D^h u\|_{L^p(V)} \le C$ 对所有的 $0 < h < \frac{1}{2}\mathrm{dist}(V, \partial U)$ 成立, 则 $u \in W^{1,p}(V)$, 满足 $\|Du\|_{L^p(V)} \le C$。

用 Fourier 变换, 我们可以得到一个 H^s 到 Lorentz 空间的嵌入结果:

命题 2.5.2 对于 $s > n/2$, 有 $H^s(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{F}L^1(\mathbb{R}^n) \subset C_0(\mathbb{R}^n)$。对于 $0 < s < n/2$, 有 $H^s(\mathbb{R}^n) \subset L^{p(s),2}(\mathbb{R}^n), 1/p(s) = 1/2 - s/n$。

证明　对于 $s > n/2$, 注意到 $(1+|\xi|^s)^{-1} \in L^2(\mathbb{R}^n)$, 以及 H^s 的定义, 我们知道 $\hat{u} \in L^1(\mathbb{R}^n)$, 这样由 Fourier 变换的性质即知这时的结论成立。对于 $0 < s < n/2$, $(1+|\xi|^s)^{-1} < |\xi|^{-s} \in L^{n/s,\infty}(\mathbb{R}^n)$, $\hat{u} \in L^{a(s),2}(\mathbb{R}^n), 1/a(s) = 1/2 + s/n$. 注意到 $\mathcal{F}^{-1} = \bar{\mathcal{F}} : L^1(\mathbb{R}^n) \to L^\infty(\mathbb{R}^n)$, 以及 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 到自身的映射, 我们有 $(L^1(\mathbb{R}^n), L^2(\mathbb{R}^n))_{\theta,2}$ 到 $(L^\infty(\mathbb{R}^n), L^2(\mathbb{R}^n))_{\theta,2}$。如果取 $1/p(\theta) = (1-\theta)/1 + \theta/2$, 第一个空间是 $L^{p(\theta),2}$, 后一个空间是 $L^{q(\theta),2}$, $1/q(\theta) = (1-\theta)/2 + \theta/\infty = 1 - 1/p(\theta)$, 这样 $q(\theta) = p(\theta)$。因此, $\hat{u} \in L^{a(s),2}(\mathbb{R}^n)$ 意味着 $u \in L^{b(s),2}(\mathbb{R}^n)$, $b(s) = a(s)'$, 即 $1/b(s) = 1/2 - s/n$。

对于 $p \neq 2$ 的 Sobolev 空间, 同样可以说明对于 $0 < s < n/p$, $W^{s,p}(\mathbb{R}^n) \subset L^{p(s),q}(\mathbb{R}^n)$ 成立。

齐次 Sobolev 空间　对于 $kp < n$, 我们可以用 $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ 关于范数 $\|u\|_{\dot{W}^{k,p}(\mathbb{R}^n)} = \sum_{|\alpha|=k} \|\partial^\alpha u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$ 的闭包来定义齐次 Sobolev 空间 $\dot{W}^{k,p}(\mathbb{R}^n)$。我们可以定义局部齐次空间 $\dot{W}^{k,p}(\Omega)$ 为 $u \in \dot{W}^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ 在 Ω 中的限制 $u|_\Omega$, 其范数定义为

$$\|u\|_{\dot{W}^{k,p}(\Omega)} = \inf_{v \in \dot{W}^{k,p}(\mathbb{R}^n), \text{且在}\Omega\text{上}v=u} \|v\|_{\dot{W}^{k,p}(\mathbb{R}^n)}.$$

如果 $kp < n$, 由定义和 Sobolev 嵌入定理立刻有连续嵌入 $\dot{W}^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{k}{n}$, 成立。这样当 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界区域时, $\dot{W}^{k,p}(\Omega)$ 和 $W^{k,p}(\Omega)$ 在等价范数下是同构的。

特别对于 $p = 2$, 我们可以定义

$$\dot{H}^s = \{u \in \mathcal{S}' : \hat{u} \in L^1_{loc}, \|u\|^2_{\dot{H}^s} = \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2s} |\hat{u}(\xi)|^2 \mathrm{d}\xi < +\infty\}.$$

当 $s \geq n/2$ 时, $\dot{H}^s$ 不是 Hilbert 空间。事实上, 设 C 是包含在单位球 $B(0,1)$ 中的一个环, 满足 $C \cap 2C = \emptyset$。定义序列 $f_n = \mathcal{F}^{-1} \sum_{j=1}^n \frac{2^{j(s+\frac{n}{2})}}{j} \mathbf{1}_{2^{-n}C}(\xi)$, 则容易验证当 $s \geq n/2$ 时, 这是 $\dot{H}^s$ 中的一个 Cauchy 序列, 但并不收敛于 $\dot{H}^s$ 中的元素。

定理 2.5.3　*若 $0 < s < \frac{n}{2}$, 则 $\dot{H}^s(\mathbb{R}^n)$ 可以连续的嵌入到 $L^{\frac{2n}{n-2s}}(\mathbb{R}^n)$。*

证明　显然, 指标 $p = \frac{2n}{n-2s}$ 来自于标尺度平衡分析。不失一般性, 设 $\|f\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^n)} = 1$, 我们将 f 进行高低频分解, $f = f_{1,A} = \mathcal{F}^{-1}(\mathbf{1}_{B(0,A)}\hat{f})$, $f = f_{2,A} = \mathcal{F}^{-1}(\mathbf{1}_{B^c(0,A)}\hat{f})$, 其中 A 待定。注意到对于 $s < n/2$, K 是一个紧集。如果 $\mathrm{supp}\hat{f} \subset K$, 则对 $f \in \dot{H}^s$ 有

$$\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq (2\pi)^{-n} \|\hat{f}\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq (2\pi)^{-n} \left(\frac{\mathrm{d}\xi}{|\xi|^{2s}}\right)^{1/2} \|f\|_{\dot{H}^s}.$$

这样, 我们立刻有

$$\|f_{1,A}\|_{L^\infty} \leq C_s A^{\frac{n}{2}-s}. \tag{2.5.4}$$

由三角不等式, 对于任何 $A > 0$, 有

$$\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \lambda\} \subset \{x \in \mathbb{R}^n : |f_{1,A}(x)| > \lambda/2\} \cup \{x \in \mathbb{R}^n : |f_{2,A}(x)| > \lambda/2\}.$$

由 (2.5.4), 我们有 $A = A_\lambda = (\lambda/(4C_s))^{p/n}$ 意味着测度 $\mathrm{meas}(\{x \in \mathbb{R}^n : |f_{1,A}(x)| > \lambda/2\})$=0。因此, 由 Chebyschev 不等式,

$$\|f\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq p \int_0^\infty \lambda^{p-1} \mathrm{meas}\{x \in \mathbb{R}^n : |f_{1,A}(x)| > \lambda/2\} \mathrm{d}\lambda$$

$$
\begin{aligned}
&\leq 4p\int_0^{\infty}\lambda^{p-3}\|f_{2,A}\|^2_{L^p(\mathbb{R}^n)}\mathrm{d}\lambda \\
&\leq 4p(\pi)^{-n}\int_0^{\infty}\lambda^{p-3}\int_{|\xi|\geq A_\lambda}|\hat{f}(\xi)|^2\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\lambda.
\end{aligned}
$$

由 A_λ 的定义知，$|\xi|\geq A_\lambda$ 等价于 $\lambda\leq 4C_s|\xi|^{n/p}$。再由 Fubini 定理

$$
\begin{aligned}
\|f\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} &\leq 4p(2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int^{4C_s|\xi|^{n/p}}\lambda^{p-3}\mathrm{d}\lambda\right)|\hat{f}(\xi)|^2\mathrm{d}\xi \\
&\leq \frac{4p}{p-2}(2\pi)^{-n}(4C_s)^{p-2}\int_{\mathbb{R}^n}|\xi|^{\frac{n(p-2)}{p}}|\hat{f}(\xi)|^2\mathrm{d}\xi.
\end{aligned}
$$

用对偶方法，我们可以得到

推论 2.5.2 对于 $p\in(1,2]$ 有 $L^p(\mathbb{R}^n)\subset\dot{H}^s(\mathbb{R}^n)$，$s=-n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right)$。

证明 注意到

$$
\|a\|_{\dot{H}^s}=\sup_{\|\phi\|_{\dot{H}^{-s}}\leq 1}\langle a,\phi\rangle
$$

以及 $-s=n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right)=n\left(\frac{1}{2}-(1-\frac{1}{p})\right)$，我们有 $\|\phi\|_{\dot{H}^{-s}}\geq C\|\phi\|_{L^{p'}}$，这样

$$
\|a\|_{\dot{H}^s}\leq C\sup_{\|\phi\|_{L^{p'}}\leq 1}\langle a,\phi\rangle\leq C\|a\|_{L^p}.
$$

2.5.2 Klainerman-Sobolev 不等式

Klainerman 在保持形式 $\Box u=0$ 不变的线性变换群——Poincaré 群的框架下证明了 Sobolev 不等式。这样的向量场我们将称它们是不变向量场。

命题 2.5.3 对于任何多重指标 $\alpha\neq 0$ 和 $(t,x)\ni\Gamma$，设 $r=|x|,\partial_r=r^{-1}\sum_{i=1}^n x_i\partial_i$，则在 $\mathbb{R}^{1+n}_+\setminus 0$ 中我们有

$$
\partial^\alpha=\sum_{1\leq|\beta|\leq|\alpha|}c_{\alpha\beta}(t,x)\Gamma^\beta, \tag{2.5.5}
$$

其中系数在光锥外是光滑的，$-|\alpha|$ 次齐次的，在等式右边的向量场中仅含齐次向量场。也有

$$
(t-r)^2\sum_{i=0}^n|\partial_i u(t,x)|^2\leq|L_0u(t,x)|^2+\sum_{0\leq j<k\leq n}|(\Omega_{jk}u)(t,x)|^2. \tag{2.5.6}
$$

证明 第一部分来自于恒等式

$$
(\sum_0^n\lambda_k x_k^2)\partial_j=\lambda_j x_j L_0-\sum_0^n x_k\Omega_{jk}, \tag{2.5.7}
$$

这样 $\partial_j=\sum_0^n a_{jv}(t,x)\Gamma_v$，其中 $\lambda=(1,-1,\cdots,-1)$。

为证明 (2.5.6) 我们利用,

$$(t-r)\partial_t = \frac{1}{r+t}(tL_0 - \sum_{i=1}^{n} x_i\Omega_{0i}) \tag{2.5.8}$$

由于 (2.5.6) 在旋转下是不变的, 在证明中我们可以假设 $x_1 > 0, x_2 = \cdots = x_n = 0$。则

$$(t^2+|x|^2)\sum_{j=2}^{n}|\partial_j u|^2 = \sum_{0<j<k}|\Omega_{jk}u|^2 + \sum_{k=2}^{n}|\Omega_{0k}u|^2 \tag{2.5.9}$$

由 (2.5.7) 和 (2.5.8), 也有

$$(t^2-|x|^2)\partial_t u = tL_0 u - x_1\Omega_{01}u,\ (t^2-|x|^2)\partial_1 u = -x_1 L_0 + \Omega_{01}u,$$

这样,

$$\begin{aligned}(t^2-|x|^2)^2(|\partial_t u|^2+|\partial_1 u|^2) &\leq 2(t+x_1)^2(|L_0 u|^2+|\Omega_{01}u|^2)\\ &\leq (t^2+x_1^2)(|L_0 u|^2+|\Omega_{01}u|^2)\end{aligned}$$

组合 (2.5.9) 得到 (2.5.6)。

Klainerman-Sobolev 不等式的证明将要求用这个命题与下面的 $\mathbb{R}^n$ 中 Sobolev 定理的修改形式。

引理 2.5.1 固定 $\delta > 0$, 则如果 $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$,

$$|f(x)|^2 \leq C_{n,\delta}\sum_{|\alpha|\leq\frac{n+2}{2}}\int_{|y|<\delta}|(\partial_x^\alpha f)(x+y)|^2\mathrm{d}y \tag{2.5.10}$$

如果 $u \in C^\infty(S^{n-1})$, 则

$$|u(w)|^2 \leq C_n\sum_{|\alpha|\leq\frac{n+1}{2}}\int_{S^{n-1}}|\partial_\nu^\alpha u(\nu)|^2\mathrm{d}\sigma(\nu) \tag{2.5.11}$$

如果 $\partial_\nu^\alpha = \Omega_{12}^{\alpha_1}\cdots\Omega_{n-1n}^{\alpha_\mu}, \mu = n(n-1)/2, \Omega_{ij}, 1\leq i<j\leq n$ 记 (1.3.3) 中的向量场到 S^{n-1} 的限制。如果 $v(r,w)$ 在 $C^\infty(\mathbb{R}_+\times S^{n-1})$ 中, 也有

$$|v(r,w)|^2 \leq C_{n,\delta}\sum_{j+|\alpha|\leq\frac{n+2}{2}}\int\int_{|q|<\delta}|(\partial_q^j\partial_\nu^\alpha v)(r+q,\nu)|^2\mathrm{d}q\mathrm{d}\sigma(\nu) \tag{2.5.12}$$

不等式 (2.5.10) 只是 Euclidean-Sobolev 估计的局部形式, 来自于后者的一个简单的截断函数讨论。取 $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, 在以原点为中心的单位球上为 1。将 Sobolev 不等式应用到 $\chi(y/8)u(y)$ 求导得所要的不等式, 且满足 $C_\delta \leq C(1+\delta^{-n-2})$。引理中另外的不等式来自于 (2.5.10), 使用 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上的局部坐标, 由于 $\Omega_{ij}, 1\leq i<j\leq n$, 张成 $\mathbb{S}^{n-1}$ 的任意点的切空间。

定理 2.5.4 (Klainerman-Sobolev **不等式**) 设 $u \in C^\infty(\mathbb{R}^{1+n})$, 当 $|x|$ 大时为 0, 则如果 $t > 0$,

$$(1+t+|x|)^{\frac{n-1}{2}}(1+|t-|x||)^{1/2}|u(t,x)| \leq C \sum_{|\alpha| \leq \frac{n+2}{2}} \|\Gamma^\alpha u(t,\cdot)\|_{L^2}. \qquad (2.5.13)$$

证明 情形 $t+|x| \leq 1$ 来自于 (2.5.10), 下面我们将假设 $t+|x|>1$。

情形 1: $|x| \notin [t/2, 3t/2]$。

由于我们假设 (t,x) 离开光锥, 这里我们要用 (2.5.6)。事实上, 如果 $|y| < (t+|x|)/8$, 由于这时存在 $c>0$, 使得

$$|t-|x+y|| \geq c(t+|x|).$$

由交换子的讨论和 (2.5.6) 可得

$$\begin{aligned}
&(t+|x|)^n \sum_{|\alpha| \leq \frac{n+2}{2}} \int_{|y|<1/8} |\partial_y^\alpha(u(t,x+(t+|x|)y))|^2 \mathrm{d}y \\
= & \sum_{|\alpha| \leq \frac{n+2}{2}} \int_{|y|<\frac{t+|x|}{8}} |((t+|x|)\partial_y)^\alpha u(t,x+y)|^2 \mathrm{d}y \\
\leq & \; C \sum_{|\alpha| \leq \frac{n+2}{2}} \|\Gamma^\alpha u(t,\cdot)\|_{L^2}^2,
\end{aligned}$$

其中最后的和仅包括齐次向量场。由于 (2.5.10) 意味着 $(t+|x|)^n|u(t,x)|^2$ 由左边控制, 我们就在这种情形得到 (2.5.13)。

情形 2: $|x| \in [t/2, 3t/2]$。

这里我们需要利用命题 2.5.3 的另一部分, 为用 (2.5.5), 令 $q=|x|-t=r-t, x=rw, w \in \mathbb{S}^{n-1}$。在这些修改的极坐标下, 如果我们记 $v(t,q,w)=u(t,(t+q)w)$, 可得 $\partial_q v = \sum_0^n w_j \partial_j u = \partial_r u, (1 \leq i < j \leq n)$。

$$\begin{aligned}
&|u(t,x)|^2 = |v(t,q,w)|^2 \\
\leq & \; C_t \sum_{j+|\alpha| \leq \frac{n+2}{2}} \int_{|p| \leq \frac{t}{4}} \int_{\eta \in S^{n-1}} |\partial_q^j \partial_w^\alpha v(t,p+q,\eta)|^2 \mathrm{d}\sigma(\eta) \mathrm{d}p \\
\leq & \; C_t \sum_{j+|\alpha| \leq \frac{n+2}{2}} \int_{|p|<\frac{t}{4}} \int_{\eta \in S^{n-1}} |\partial_r^j \Gamma^\alpha u(t,(t+q+p)\eta)|^2 \mathrm{d}\sigma(\eta) \mathrm{d}p, (2.5.14)
\end{aligned}$$

注意到当 $|x| \leq \frac{3t}{2}$ 时有 $1 < t+|x| \leq \frac{5t}{2}$, 这样就有 $t > 2/5$。这也就有 $C_t \leq C$。由于该情形 $|q| = |r-t| \leq t/2$, $|p| \leq t/4$, 这意味着 $t/4 \leq t+p+q \leq 2t$。因此, 在 (2.5.14) 中令 $r=t+p+q$, 注意到 $\partial_r u = \sum_1^n \eta_i \partial_i u$,

$$|u(t,x)|^2 \;\leq\; C \sum_{|\beta| \leq \frac{n+2}{2}} \int_{\frac{t}{4} \leq r \leq 2t} \int_{\eta \in S^{n-1}} |\Gamma^\beta u(t,r\eta)|^2 \mathrm{d}\sigma(\eta) \mathrm{d}r$$

$$\begin{aligned} &\le Ct^{1-n}\sum_{|\beta|\le\frac{n+2}{2}}\int_{\frac{t}{4}\le r\le 2t}\int_{\eta\in S^{n-1}}|\Gamma^\beta u(t,r\eta)|^2\mathrm{d}\sigma(\eta)\mathrm{d}r\\ &= Ct^{1-n}\sum_{|\beta|\le\frac{n+2}{2}}\|\Gamma^\beta u(t,\cdot)\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

由于 $t\approx|x|$ 和 $t+|x|>1$, 这就证明了这种情形的结论。

这两步意味着 $(t+|x|)^{\frac{n-1}{2}}|u(t,x)|$ 由 (2.5.13) 的右边来控制。在应用中, 它就是所需要的。对于 $|x|\in[t/2,3t/2]$, 我们将通过说明如何用 (2.5.5) 导出包括 $t-|x|$ 的额外的衰减完成证明。

这里我们要用包含 $j=0,k\ge 0$ 的 (2.5.14) 中的和的部分。为了利用在每个导数中 q 的额外因子，我们需要修改在证明第一部分用过的讨论。更具体地，如果我们固定 $x=x_0$, 将引入截断函数使得积分仅在一个区域 $q\approx q_0=t-|x_0|$ 上求。由于我们刚刚已经得到了当 $|t-|x_0||\le 1$ 时所要求的界, 让我们设 $1\le q_0\le t/2$, 取一个 $\chi\in C_0^\infty((-1/2,1/2))$ 在原点附近为 1, 令

$$v(t,q,\nu)=\chi((q-q_0)/q_0)u(t,(t+q)\nu),$$

在这种情形

$$v(t,q,w)=u(t,(t+q)w)=u(t,x_0),\text{如果}q=q_0.$$

由于在 v 的支集上, q 与 q_0 可比较, 并且

$$|(q_0\partial_q)^j\chi((q-q_0)/q_0)|\le C_j,$$

其中 C_j 仅依赖于 χ, 我们必有一致界

$$\sum_{j+|\alpha|\le\frac{n+2}{2}}|(q_0\partial_q)^j\partial_\nu^\alpha v(t,q,\nu)|\le C\sum_{j+|\alpha|\le\frac{n+2}{2}}|(q\partial_q)^j\partial_\nu^\alpha u(t,(t+q)\nu)|.$$

注意到截断函数除了

$$|q-(t-|x_0|)|\le 1/2|t-|x_0||,$$

为 0, 且由于 $|t-|x_0||\le t/2$, 这意味着如果 $|q|\ge 3t/4$, $v(t,q,\nu)=0$。这样,

$$\begin{aligned} &\sum_{j+|\alpha|\le\frac{n+2}{2}}\int\int|\partial_q^j\partial_\nu^\alpha(v(t,q_0+q,\nu))|^2\mathrm{d}q\mathrm{d}\sigma(\nu)\\ =\ &|q_0|^{-1}\sum_{j+|\alpha|\le\frac{n+2}{2}}\int\int|(q_0\partial_q)^j\partial_\nu^\alpha v)(t,q_0+q_0q,\nu)|^2\mathrm{d}qd\sigma(\nu)\\ =\ &|q_0|^{-1}\sum_{j+|\alpha|\le\frac{n+2}{2}}\int\int_{|q|\le 3t/4}|((q\partial_q)^j\partial_\nu^\alpha u)(t,(t+q)\nu)|^2\mathrm{d}qd\sigma(\nu) \end{aligned}$$

由于 (2.5.12) 意味着 $|v(t,q_0,w)|^2$ 由左边控制, 我们用 (2.5.14) 得 $|q_0|t^{n-1}|u(t,x_0)|^2$, 由 (2.5.13) 右边的平方来控制。

2.5.3　Sobolev 空间的 L-P 分解刻画

由 L-P 分解（环形分解）的几乎正交性以及关于导数的敏感性，对命题 2.3.4 我们立刻就有如下 Sobolev 空间的环形分解刻划：

命题 2.5.4 若 $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$，则对于所有 $p \geq -1$，$\|u_p\|_{L^2} \leq C\|u\|_{H^s} c_p 2^{-ps}$，其中 $c_p = c_p(u)$ 满足 $\sum c_p^2 = 1$。

反过来，如果对 $p \geq -1$，$\|u_p\|_{L^2} \leq C c_p 2^{-ps}$，$\sum c_p^2 \leq 1$，则 $u \in H^s$ 且 $\|u\|_{H^s} \leq C$。

如果函数序列 $\{u_q\}_{q\geq -1}$ 的支集 $\mathrm{supp}\widehat{u_q} \subset \{\xi : |\xi| \leq C2^q\}$，设对某个 $s > 0$，$\|u_q\|_{L^2} \leq C c_q 2^{-qs}$，$\sum c_q^2 \leq 1$ 成立，则 $u = \sum_{q\geq -1} u_q \in H^s$，$\|u\|_{H^s} \leq C$。

命题 2.5.5 对于 $2 \leq p < \infty$ 和 $s \in \mathbb{R}$，我们有

$$C_{p,s}^{-1}\left(\sum \lambda^{ps}\|\Delta_\lambda f\|_{L^p}^p\right)^{1/p} \leq \|f\|_{\dot{W}^{s,p}} \leq C_{p,s}\left(\sum \lambda^{2s}\|\Delta_\lambda f\|_{L^p}^2\right)^{1/2}. \tag{2.5.15}$$

对于 $1 < p \leq 2$ 和 $s \in \mathbb{R}$，我们有

$$C_{p,s}^{-1}\left(\sum \lambda^{2s}\|\Delta_\lambda f\|_{L^p}^2\right)^{1/2} \leq \|f\|_{\dot{W}^{s,p}} \leq C_{p,s}\left(\sum \lambda^{ps}\|\Delta_\lambda f\|_{L^p}^p\right)^{1/p}. \tag{2.5.16}$$

相应于 Sobolev 空间的 Hölder 空间也有环形分解的刻画。为此我们先回忆一下 Hölder 空间 $C^\alpha(\mathbb{R}^n)$ 的定义：设 $\alpha > 0, \notin \mathbb{N}$，$u \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$，$u \in C^\alpha(\mathbb{R}^n)$ 是指满足如下条件的函数：1）当 $0 < \alpha < 1$ 时，

$$[u]_\alpha = \sup_{\substack{(x,y)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n \\ x\neq y}} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\alpha} < \infty.$$

此时，C^α 的范数为 $\|u\|_{C^\alpha} = \|u\|_{L^\infty} + [u]_\alpha$。

2）当 $\alpha > 1$ 时，用 $[\alpha]$ 表示 α 的整数部分，记 $p = \alpha - [\alpha]$。并按 1）的意义要求 $\mathrm{D}^\lambda u \in C^\rho(\mathbb{R}^n)$，$|\lambda| \leq [\alpha]$。此时记 u 的 C^α 模为

$$\|u\|_{C^\alpha} = \sum_{|\lambda|\leq[\alpha]} \|\mathrm{D}^\lambda u\|_{L^\infty} + \sum_{|\lambda|=[\alpha]} [\mathrm{D}^\lambda u]_\rho.$$

命题 2.5.6 设 $u \in C^\alpha(\mathbb{R}^n)$，$\alpha \notin \mathbb{N}$，对所有的 $p \geq -1$，$\|u_p\|_{L^\infty} \leq C\|u\|_{C^\alpha} 2^{-p\alpha}$。

反之，如果 $p \geq -1$，$\|u_p\|_{L^\infty} \leq C\|u\|_{C^\alpha} 2^{-p\alpha}, \alpha \notin \mathbb{N}$，则 $u \in C^\alpha$ 且 $\|u\|_{C^\alpha} \leq C$。

如果函数序列 $\{u_q\}_{q\geq -1}$ 的支集 $\mathrm{supp}\widehat{u_q} \subset \{\xi : |\xi| \leq C2^q\}$。设对某个 $s > 0$，$\|u_q\|_{L^\infty} \leq C2^{-qs}$ 成立，则 $u = \sum_{q\geq -1} u_q \in C^\alpha$，$\|u\|_{C^\alpha} \leq C$。

要注意的是 $\|u\|_{L^\infty} \leq C$ 并不刻画 L^∞ 的特征。$\|u\|_{L^\infty} \leq C2^{-p}$ 并不刻画经典意义下 C^1 的特征，而是一个更大的称之为 Zygmund 类的函数空间

$$C_*^1(\mathbb{R}^n) = \left\{ u \in L^\infty(\mathbb{R}^n), \sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} \frac{u(x+h)+u(x-h)-2u(x)}{|h|} \right\}.$$

用环形分解我们立刻有如下的 Sobolev 嵌入：

命题 2.5.7 对于 $s > n/2$，$s - n/2 \notin \mathbb{N}$，$H^s$ 可连续地嵌入到 $C^{s-n/2}$。

$H^{\frac{n}{2}}$ 并不是 L^∞ 的子集。事实上，如果 $H^{\frac{n}{2}} \subseteq L^\infty$，则由闭图像定理可得 $H^{\frac{n}{2}} \hookrightarrow L^\infty$，这样 $\|f\|_{L^\infty} \le C\|f\|_{H^{\frac{n}{2}}}$. 这与事实 $\delta \notin H^{-\frac{n}{2}}$ 矛盾。

作为本小节的结束，我们来证明一个很有用的 Meyer 乘子引理

引理 2.5.2 设函数序列 $m_p \in C^\infty$，存在 $\delta \in \mathbb{R}$，对所有的 $k \in \mathbb{N}$，$\sum_{|\alpha|=k}\|\partial^\alpha m_p\|_{L^\infty} \le C2^{p(k+\delta)}$，则对所有的 $s > \delta$，算子 $M: u \mapsto \sum m_p u_p = Mu$，将 H^s 映到 $H^{s-\delta}$，算子的范数仅依赖于 C_k，$k \le E(s-\delta)+1$。

证明　由于 u_p 的谱在 $\{\xi : \frac{1}{2} \le 2^{-p}|\xi| \le 2\}$ 中，选取 $C > 4$，

$$\widehat{m_p} = \psi(\xi/(2^pC))\widehat{m_p} + \sum_{k\ge 0}\phi(2^{-k-p}\xi/C)\widehat{m_p} = \widehat{m_{p,-1}} + \sum_{k\ge 0}\widehat{m_{p,k}}.$$

则令 $M_k u = \sum m_{p,k}u_p$，$k \ge -1$。注意到 $M_{-1}u$ 的谱在球 $\{\xi : |\xi| \le C(C+2)2^p\}$ 中，以及 $\|m_{p,-1}u_p\|_{L^2} \le C\|m_{p,-1}\|_{L^\infty}C_p\|u\|_{H^s}2^{-ps}$，由环形分解项关于导数的敏感性性质，我们有 $\|m_{p,-1}\|_{L^\infty} \le C\|m_p\|_{L^\infty} \le C2^{p\delta}C_0$，如果 $s > \delta$，则由 Sobolev 函数的环形分解刻画即得 $M_{-1}u \in H^{s-\delta}$。

$M_k u(k \ge 0)$ 的谱在环形 $\{\xi : 2^{p+1}(\frac{C}{4}2^k - 1) \le |\xi| \le 2^{p+1}(1 + C2^k)\}$，以及 $\{\|m_{p,k}u_p\|_{L^2} \le C\|m_{p,k}\|_{L^\infty}C_p\|u\|_{H^s}2^{-ps}\}$，我们也有

$$\|m_{p,k}u_p\|_{L^\infty} \le C\sum_{|\alpha|=l}\|\partial^\alpha m_{p,k}\|_{L^\infty}2^{-(p+k)l} \le C_l 2^{-kl}2^{p\delta}.$$

对于所有的 $l \in \mathbb{N}$，有

$$\|m_{p,k}u_p\|_{L^2} \le C_l\|u\|_{H^s}2^{-kl}C_p 2^{-p(s-\delta)} \le C_l\|u\|_{H^s}2^{k(s-l-\delta)}C_p 2^{-(p+k)(s-\delta)}$$

这样有 $M_k \in H^{s-\delta}$ 满足 $\|M_k u\|_{H^{s-\delta}} \le C_l 2^{k(s-l-\delta)}\|u\|_{H^s}$。最后，选取 $l > s-\delta$，$M = \sum_{k\ge -1}M_k$ 在从 H^s 到 $H^{s-\delta}$ 的连续范数下收敛，且 $\|M\| \le C(C_0 + C_l)$。

注 2.5.3 Meyer 乘子的一个典型的例子是对于某个 $a \in L^\infty$，$m_p = S_p a(\delta = 0)$，在这种情形 m_p 有谱在 $\{\xi : |\xi| \le C2^p\}$ 中。

§2.6　Poincaré 不等式

我们先证明一个逐点 Poincaré 不等式：

定理 2.6.1 设 $f \in C^1$，则

$$|f(x) - \frac{1}{|B(0,1)|}\int_{B(x,1)}f(y)\mathrm{d}y| \lesssim \int_{B(x,1)}\frac{|\nabla f(y)|}{|x-y|^{n-1}}\mathrm{d}y. \tag{2.6.1}$$

证明　由微分基本定理可得

$$|f(y) - f(x)| \le |x-y|\int_0^1|\nabla f(x + \tau|y-x|)|\mathrm{d}\tau.$$

关于 y 在 $B(x,1)$ 上积分，用 $|B(0,1)|$ 来除得

$$\begin{aligned}|f(x)-\frac{1}{|B(0,1)|}\int_{B(x,1)}f(y)\mathrm{d}y| &\leq \frac{1}{|B(0,1)|}\int_{B(x,1)}|f(x)-f(y)|\mathrm{d}y\\ &\lesssim \int_{B(x,1)}|x-y|\int_0^1|\nabla f(x+t(y-x))|\mathrm{d}t\mathrm{d}y\\ &= \int_0^1\int_{B(x,1)}|x-y||\nabla f(x+t(y-x))|\mathrm{d}y\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

令 $z=x+t(y-x)$，交换积分次序，上式

$$\begin{aligned}&= \int_0^1\int_{B(x,1)}t^{-1}|z-x||\nabla f(z)|\frac{\mathrm{d}z}{t^n}\mathrm{d}t\\ &= \int_{B(x,1)}|t-x||\nabla f(x)|\int_{t=|z-x|}^1 t^{-(n+1)}\mathrm{d}t\mathrm{d}z\\ &\lesssim \int_{B(x,1)}|x-z|^{-(n-1)}|\nabla f(z)|\mathrm{d}z.\end{aligned}$$

应用如下的不等式

$$\int_{y\in B(x,R)}|x-y|^{-(n-a)}|z-y|^{-(n-b)}\mathrm{d}y \leq \begin{cases} C(R)|x-z|^{-(n-a-b)}, & a+b<n,\\ \log\frac{C(R)}{|z-x|}, & a+b=n,\\ C(R), & a+b>n,\end{cases}$$

和

$$\int_{y\in B(x,R)}|x-y|^{-(n-1)}\log\frac{1}{|z-y|}\mathrm{d}y \leq C(R),$$

其中 $C(R)$ 与 x,z 无关。这个定理的结论可用归纳法作如下推广：设 $f\in C^k$，则

$$|f(x)|\lesssim \sum_{0\leq j<k}\|\Delta_j^f\|_{L^1(B(x,1))}+\begin{cases}\int_{B(x,1)}|x-y|^{-(n-k)}\Delta_k^f(y)\mathrm{d}y, & 1\leq k\leq n-1,\\ \int_{B(x,1)}\log\frac{1}{|x-y|}\Delta_n^f(y)\mathrm{d}y, & k=n,\\ \|\Delta_{n+1}^f\|_{L^1(B(x,1))} & k=n+1,\end{cases} \tag{2.6.2}$$

其中 $\Delta_k^f(x)=\sum_{|\alpha|=k}|D^\alpha f(x)|$。

定义 2.6.1 设 $1\leq p\leq\infty$，Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 的非空开集，V 是 $W^{1,p}(\Omega)$ 的一个子空间，如果存在一个常数 C 使得 $\|u\|_{L^p}\leq C\|\mathrm{grad}u\|_{L^p}$ 对 $u\in V$ 都成立，我们称在 V 上 Poincaré 不等式成立。

定理 2.6.2

1. 如果 $|\Omega|<\infty$，以及常数函数属于 $W^{1,p}(\Omega)$ 的一个子空间 V，则 Poincaré 不等式在 V 上不成立。
2. 如果 Ω 包含任意大的球，即如果存在 $r_k\to\infty$ 和 $x_k\in\Omega$，使得 $B(x_k,r_k)\subset\Omega$，则 Poincaré 不等式在 $W_0^{1,p}(\Omega)$ 上不成立。

3. 如果 Ω 包含在宽度为 d 的带形中，即存在 $\xi\in\mathbb{R}^n$, $\xi=1$ 和 $\Omega\subset\{x\in\mathbb{R}^n,\alpha<\xi\cdot x<\beta\}$, $d=\beta-\alpha$, 则对所有的 $u\in W_0^{1,p}(\Omega)$, $\|u\|_{L^p}\le C_0d\|\text{grad}u\|_{L^p}$, C_0 是一个普适常数，与 Ω 无关。如果 $p=\infty$, Poincaré 不等式对 $W_0^{1,\infty}(\Omega)$ 成立当且仅当存在 $C<\infty$, 使得对所有的 $x\in\Omega$, $\text{dist}(x,\partial\Omega)\le C$。
4. 如果 $|\Omega|<\infty$, 则 Poincaré 不等式对 $W_0^{1,p}(\Omega)$, $1\le p\le\infty$ 成立，

$$\|u\|_{L^p}\le C(p)|\Omega|^{1/n}\|\text{grad}u\|_{L^p}.$$

5. 如果 V 到 $L^p(\Omega)$ 的单射是紧的，则 Poincaré 不等式在 $W^{1,p}(\Omega)$ 的一个子空间 V 成立等价于 $1\notin V$。

证明 1) 如果 $|\Omega|<\infty$, 则 $1\in W^{1,p}(\Omega)$, 但 grad 1=0, 这与 $1\in V$ 不相容。

2) $\phi\in C_0(\mathbb{R}^n)$, $\phi\ne0$, $\text{supp}\phi\subset B(0,1)$, 则 $u_k(x)=\phi\left(\frac{x-x_k}{r_k}\right)\in C_0^\infty(\Omega)$ 且 $\|u\|_{L^p}=r_k^{n/p}\|\phi\|_{L^p}$, $\|\text{grad}u\|_{L^p}=r_k^{-1+n/p}\|\text{grad}u\|_{L^p}$; 如果不等式成立，则 $1\le C/r_k$, 因此，在 $W_0^{1,p}(\Omega)$ 上的 Poincaré 不等式给出了一个 Ω 包含球的大小的界。

3) 先考虑 $n=1$ 的情形，我们已经说明对于 $v\in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\max_{x\in\mathbb{R}}|v(x)|\le\frac{1}{2}\int_{x\in\mathbb{R}}\left|\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\right|\mathrm{d}x$。这样，如果对于区间 $I=(\alpha,\beta)$ 有 $u\in C_0^\infty(I)$, 则有 $\|u\|_{L^p}\le\|u\|_{L^\infty}d^{1/p}$ 和 $\int_I\left|\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\right|\mathrm{d}x\le\|\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\|_{L^p}d^{1/p'}$, 其中 $d=\beta-\alpha$, 可得对所有的 $u\in C_0^\infty(I)$, $\|u\|_{L^p}\le\frac{d}{2}\|\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\|_{L^p}$ 成立。对于带形情形，我们可取以 $e_n=\xi$ 的正交基，使得这带形可定义为 $\alpha<x_n<\beta$。对于任何 $x'=(x_1,\cdots,x_{n-1})$ 我们有 $\int_\alpha^\beta|u(x',x_n)|^p\mathrm{d}x_n\le 2^{-p}d^p\int_\alpha^\beta\left|\frac{\partial u}{\partial x_n}(x',x_n)\right|^p\mathrm{d}x_n$, 关于 x' 积分得 $1\le p<\infty$ 情形的 Poincaré 不等式。对于 $p=\infty$, 由于 2) 这条件是必要的，充分性是因为对每个 $x\in\Omega$ 存在 $z\in\partial\Omega$ 满足 $|x-z|\le C$, 且如果 $u\in C_0^\infty(\Omega)$, 在区间 $[x,z]$ 上以及在 u 的支集之外存在 y, 使得 $|u(x)|=|u(x)-u(y)|\le C\|\text{grad}u\|_{L^\infty}$, 则同样的不等式可以延拓到 $W_0^{1,\infty}(\Omega)$。

4) 如果 $p=\infty$, 结论来自于 3)。对于 $1\le p<\infty$, 取 $q<n$ 使得 $1\le q\le p<q^*$, 对所有 $u\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, 由 Sobolev 不等式 $\|u\|_{L^{q^*}}\le C\|\text{grad}u\|_{L^q}$ 和 Hölder 不等式 $\|u\|_{L^p}\le|\Omega|^\alpha\|u\|_{L^{q^*}}$, $\alpha=\frac{1}{p}+\frac{1}{q^*}$ 以及 $\|\text{grad}u\|_{L^q}\le|\Omega|^\beta\|\text{grad}u\|_{L^p}$, $\beta=\frac{1}{q}-\frac{1}{p}$, 即得 $\alpha+\beta=\frac{1}{n}$ 的结论。

5) 由 1) 知 $1\notin V$, 这就得知必要性成立。对于充分性，取 $E_1=\bar{V}$, $A=\text{grad}$, $E_2=(L^p(\Omega)))^n$。B 是到 $E_3=L^p(\Omega)$ 的单射，则可将证明转化为下面的命题。

命题 2.6.1 *设 E_1 是 Banach 空间，E_2,E_3 是赋范空间。$A\in\mathcal{L}(E_1,E_2)$, $B\in\mathcal{L}(E_1,E_3)$ 使得 a) $\|u\|_{E_1}\approx\|Au\|_{E_2}+\|Bu\|_{E_3}$, b) B 是紧的。则有下述性质成立*

1) A 的和是有限维的；

2) A 的值域是闭的；

3) 存在常数 C_0 使得，如果 F 是一个赋范空间，$L\in\mathcal{L}(E_1,F)$ 满足当 $Au=0$ 时 $Lu=0$, 则对所有的 $u\in E_1$, 有 $\|Lu\|_F\le C_0\|L\|\|Au\|_{E_2}$ 成立；

4) 如果 G 是一个赋范空间，$M\in\mathcal{L}(E_1,G)$ 满足当 $Au=0,u\ne0$ 时，$Lu\ne0$, 则 $\|u\|_{E_1}\approx\|Au\|_{E_2}+\|Mu\|_G$ 成立。

这个命题的关键性的假设是紧性，否则结论可能不成立。例如：对于 $1<p<\infty$, $E_1=W^{1,p}(\mathbb{R})$, $A=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$, $E_2=E_3=L^p(\mathbb{R})$, B 是 $W^{1,p}(\Omega)$ 到 $L^p(\mathbb{R})$ 的单射（不

紧)，则 A 的值域非闭，是稠的。对于 $p=1$ 是闭的，等于 $L^1(\mathbb{R})$ 中积分为零的子空间。

如果考虑在有界开集上的 Sobolev 空间的紧性，对边界就要求有足够的光滑性。这个命题的证明可见 Tartar 的讲义 [64]。

§2.7 非线性估计

2.7.1 Gagliardo-Nirenberg 不等式

在非线性偏微分方程分析中，我们经常会遇到复合函数的各种导数的积分估计，其中最基本的是来自 Leibniz 法则或链锁法则的估计。而要导出这些估计就需用 Gagliardo-Nirenberg 不等式，为此我们先来证明这一不等式。

定理 2.7.1 设 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 是一个开集，$1\le p,q\le\infty, j,m$ 是两个整数，$0\le j<m$，如果

$$\frac{1}{p}-\frac{j}{n}=a\left(\frac{1}{r}-\frac{m}{n}\right)+\frac{1-a}{q}$$

成立，其中 $a\in[\frac{j}{m},1]$，如果 $1<\frac{n}{m-j}<\infty, a<1$。则对所有的 $u\in W_0^{m,r}(\Omega)\cap L^q(\Omega)$，$|\alpha|=j$，$D^\alpha u\in L^p(\Omega)$。此外，成立不等式

$$\|u\|_{\dot{W}^{j,p}}\le C\|u\|_{\dot{W}^{m,r}}^a\|u\|_{L^q}^{1-a}. \tag{2.7.1}$$

我们仅对 $u\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ 给出这个定理的证明，一般情形可由稠密性的讨论得到。先证一个一阶情形的不等式。

命题 2.7.1 设 $1\le p,q,r\le\infty$，$\frac{1}{p}=a(\frac{1}{r}-\frac{1}{n})+\frac{1-a}{q}$，其中 $a\in[0,1]$，如果 $r=n\ge 2, a<1$。对于 $u\in C_0^1(\mathbb{R}^n)$，$\exists\ C=C(n,p,q,r,a)$ 使得

$$\|u\|_{L^p}\le C\|u\|_{W^{1,r}}^a\|u\|_{L^q}^{1-a}. \tag{2.7.2}$$

证明 对于 $r>n$，这时 $p\ge q$，由 Hölder 不等式即可得

$$\|u\|_{L^p}\le\|u\|_{L^\infty}^{\frac{p-q}{p}}\|u\|_{L^q}^{\frac{q}{p}}.$$

应用 Sobolev 不等式即可得到这时的 (2.7.2) 式。

对于 $n\ge 2$，$r<n$，令 $r^*=\frac{nr}{n-r}$，由 Hölder 不等式，有

$$\|u\|_{L^p}\le\|u\|_{L^{r^*}}^a\|u\|_{L^q}^{1-a},$$

其中 a 满足命题条件，由 Sobolev 不等式即得这时的结论。

对于 $r=n$，首先设 $n=1$，由 Hölder 不等式得 $\|u\|_{L^p}\le\|u\|_{L^\infty}^a\|u\|_{L^q}^{1-a}$，由 Sobolev 不等式即得结论。在 $n\ge 2$ 情形（这时 $a<1$），由于我们不能用 $\|u\|_{W^{1,n}}$

估计 $\|u\|_{L^\infty}$，故不能用前面的讨论。注意到对于 $t>1$, $\partial_j(|u|^{t-1}u)=t|u|^{t-1}\partial_j u$, $1\le j\le n$, 由 Sobolev 不等式即可得

$$\|u\|^t_{L^{\frac{tn}{n-1}}}\le(2n)^{-1}t\|u\|^t_{L^{\frac{(t-1)n}{n-1}}}\|u\|_{W^{1,r}}. \tag{2.7.3}$$

对于 $p>q+\frac{n}{n-1}$, 设 $t\ge 1$ 使得 $\frac{tn}{n-1}=p$ $\frac{(t-1)n}{n-1}\ge q$, 由 Hölder 不等式

$$\|u\|_{L^{\frac{(t-1)n}{n-1}}}\le\|u\|^{\alpha}_{L^p}\|u\|^{1-\alpha}_{L^q}, \tag{2.7.4}$$

其中 $\frac{n-1}{(t-1)n}=\frac{\alpha(n-1)}{tn}+\frac{1-\alpha}{q}$.

由 (2.7.3), (2.7.4) 得

$$\|u\|^t_{L^p}\le(2n)^{-1}t\|u\|^{(t-1)\alpha}_{L^p}\|u\|^{(t-1)(1-\alpha)}_{L^q}\|u\|_{W^{1,r}}.$$

这样,

$$\|u\|_{L^p}\le(t/2n)^{\frac{1}{-(t-1)\alpha}}\|u\|_{L^q}^{\frac{(t-1)(1-\alpha)}{t-(t-1)\alpha}}\|u\|_{W^{1,r}}^{\frac{1}{t-(t-1)\alpha}}.$$

容易验证 $\frac{1}{t-(t-1)\alpha}=\frac{p-q}{p}=a$, $\frac{(t-1)(1-\alpha)}{t-(t-1)\alpha}=\frac{q}{p}=1-a$. 由 $\frac{t}{2n}\le p$ 即得 (2.7.2)。对于 $p<q+\frac{n}{n-1}$, 由 Hölder 不等式得 $\|u\|_{L^p}\le\|u\|_{L^{3q}}^{\frac{3(p-q)}{2p}}\|u\|_{L^q}^{\frac{3q-p}{2p}}$。注意到 $3q\ge q+2\ge p$, 取 $p=3q$, 由已证的 (2.7.2) 估计 $\|u\|_{L^{3q}}$ 即得结论。

为证含有中间导数的不等式，我们先给出几个引理。

引理 2.7.1 设 I 是 $\mathbb{R}$ 中长度为 $|I|$ 的一个有限区间, $u\in L^q(I)$, $u''\in L^r(I)$, $q,r\in[1,\infty]$, 则 $u'\in L^p(I)$, $p\in[1,\infty)$ 且

$$\|u'\|_{L^p(I)}\le 4|I|^{-\gamma}\|u\|_{L^q(I)}+2\|u''\|_{L^r(I)}|I|^{\gamma}, \tag{2.7.5}$$

其中 $\gamma=1+\frac{1}{p}-\frac{1}{r}$, $\frac{2}{p}=\frac{1}{q}+\frac{1}{r}$。

证明 作一个平移与伸缩变换，可将不等式转化为 $I=(0,1)$ 的情形，即

$$\|u'\|_{L^p(I)}\le 2\|u''\|_{L^r(I)}+4\|u\|_{L^q(I)}. \tag{2.7.6}$$

显然，这个不等式的最强情形是在 $p=\infty, q=r=1$。因此，我们作一个辅助函数 $\xi\in C^1([0,1])\cap C^2([0,1]\setminus\{\frac{1}{2}\})$, $0\le\xi\le 1$, $\xi(0)=1,\xi'(0)=\xi(1)=\xi'(1)=0$。对于 $0\le x\le 1/2$, $\xi(x)=1-2x^2$; 对于 $1/2\le x\le 1$, $\xi(x)=2(1-x)^2$。注意到所作的 $\xi(x)$ 满足 $\xi''(x)=-4$, $0\le x\le 1/2$; $\xi''(x)=4, 1/2\le x\le 1$。分部积分 $\int_0^1\xi v''\mathrm{d}x$ 即可得

$$|v'(0)|\le 4\|v\|_{L^1(0,1)}+\|v''\|_{L^1(0,1)}.$$

对于给定的 $0\le x\le 1$, 我们导得

$$|v'(x)|\le|v'(0)|+\int_0^x|v''|\mathrm{d}x\le 4\|v\|_{L^1(0,1)}+2\|v''\|_{L^1(0,1)}.$$

引理 2.7.2 设 $1 \le p, q, r \le \infty$ 满足 $\frac{2}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$, 则对于 $u \in C_0^\infty(\mathbb{R})$,

$$\|u'\|_{L^p}^2 \le 8\|u\|_{L^q}\|u''\|_{L^r}. \tag{2.7.7}$$

证明 对于给定的 $u \in C_0^2(\mathbb{R})$, 及任何区间 $I \subset \mathbb{R}$, 令 $f(I) = |I|^{-\gamma p}\|u\|_{L^q(I)}^p$, $g(I) = |I|^{\gamma p}\|u''\|_{L^r(I)}^p$。对于任意给定的 $\delta > 0$, 存在正整数 l 和不相交的区间 $I_1, \cdots, I_l$ 使得 $\cup_{1\le j\le l}\bar{I}_j \supset \mathrm{supp}u$ 具有如下性质：对于所有 $1 \le j \le l$,

$$l \le 1 + |\mathrm{supp}u|/\delta, \tag{2.7.8}$$

$$\begin{cases} \text{或}|I_j| = \delta, f(I_j) \le g(I_j), \\ \text{或}|I_j| > \delta, f(I_j) = g(I_j) \end{cases}. \tag{2.7.9}$$

事实上，令 $x_0 = \limsup u$, $I = (x_0, x_0 + \delta)$。如果 $f(I) \le g(I)$, 令 $I_1 = I$; 如果 $f(I) > g(I)$, 注意到 $\phi(t) = f(x_0, x_0 + \delta + t)$, $\psi(t) = g(x_0, x_0 + \delta + t)$ 满足 $\phi(0) > \psi(0)$ 和当 $t \to \infty$ 时, $\phi(t) \to 0$, $\psi(t) \to 0$。存在 $t > 0$, 使得 $\phi(t) = \psi(t)$, 令 $I_1 = (x_0, x_0 + \delta + t)$, 那么我们看到 I_1 满足 (2.7.9)。如果 $\mathrm{supp}u \not\subset I_1$, 我们能重复这个构造。由于 $\mathrm{supp}u$ 是紧的且 $|I_j| \ge \delta$, 通过有限步，如 l 步，可以得到一族不交的开区间 I_j 均满足 (2.7.9) 且

$$\bigcup_{1\le j\le l-1} I_j \subset \mathrm{supp}u \subset \bigcup_{1\le j\le l} \bar{I}_j.$$

这意味着 (2.7.8) 成立。固定 $\delta > 0$, 由 引理 2.7.1 可得

$$\int_{\mathbb{R}} |u'|^p \mathrm{d}x \le 2^{2p-1}\sum_{j=1}^{l}\left[2^p f(I_j) + g(I_j)\right].$$

令 $A_1 = \{j \in \{1, \cdots, l\} : |I_j| = \delta\}$, $A_2 = \{j \in \{1, \cdots, l\} : |I_j| > \delta\}$。由 (2.7.9) $\{1, \cdots, l\} = A_1 \cup A_2$, 如果 $j \in A_1$, 则 $f(I_j) \le g(I_j)$。这样

$$\begin{aligned} 2^p f(I_j) + g(I_j) &\le (2^p + 1)g(I_j) \le (2^p + 1)|I_j|^{\gamma p}\|u''\|_{L^r(I)}^p \\ &\le (2^p + 1)\delta^{\gamma p}\|u''\|_{L^r(\mathbb{R})}^p. \end{aligned}$$

从上式和 (2.7.8) 得

$$\sum_{j\in A_1}\left[2^p f(I_j) + g(I_j)\right] \le (2^p + 1)(1 + |\mathrm{supp}u|/\delta)\delta^{\gamma p}\|u''\|_{L^r(\mathbb{R})}^p,$$

如果 $j \in A_2$, 则由 (2.7.9)$f(I_j) = g(I_j)$。因为 $f(I_j)g(I_j) = \|u\|_{L^q(I_j)}^p\|u''\|_{L^p(I_j)}^p$, 我们看到对于所有 $j \in A_2$, $f(I_j) = g(I_j) = \|u\|_{L^q(I_j)}^{p/2}\|u''\|_{L^p(I_j)}^{p/2}$。从上式我们得到

$$\sum_{j\in A_2}\left[2^p f(I_j) + g(I_j)\right] \le (2^p + 1)\sum_{j\in A_2}\|u\|_{L^q(I_j)}^{p/2}\|u''\|_{L^p(I_j)}^{p/2}$$

$$\leq (2^p+1)\left(\sum_{j\in A_2}\|u\|^q_{L^q(I_j)}\right)^{p/2q}\left(\|u''\|^r_{L^r(I_j)}\right)^{p/2r}$$
$$\leq (2^p+1)\|u\|^{p/2}_{L^q(\mathbb{R})}\|u''\|^{p/2}_{L^r(\mathbb{R})}.$$

从上可得

$$\int_{\mathbb{R}}|u'|^p\mathrm{d}x\leq 2^{2p-1}(2^p+1)\left[\|u\|^{p/2}_{L^q(\mathbb{R})}\|u''\|^{p/2}_{L^r(\mathbb{R})}+(1+|\mathrm{supp}u|/\delta)\delta^{\gamma p}\|u''\|^p_{L^r(\mathbb{R})}\right].$$

由 γ 的定义及 $r>1$ 得 $\gamma p=1+p-\frac{p}{r}>1$。令 $\delta\searrow 0$，得

$$\int_{\mathbb{R}}|u'|^p\mathrm{d}x\leq 2^{2p-1}(2^p+1)\|u\|^{p/2}_{L^q(\mathbb{R})}\|u''\|^{p/2}_{L^r(\mathbb{R})}.$$

因为 $2^p+1\leq 2^{p+1}$，我们看到 $2^{2p-1}(2^p+1)\leq 2^{3p}$。引理的结论来自取上述不等式的第 p 个根。

命题 2.7.2 对于给定的整数 $m\geq 1$，存在常数 C_m 使得对于 $u\in C_0^m(\mathbb{R}^n)$ 成立

$$\|\partial_i^j u\|_{L^p}\leq C_m\|u\|^{\frac{m-j}{m}}_{L^q}\|\partial_i^m u\|^{\frac{j}{m}}_{L^r},\tag{2.7.10}$$

其中 $i=1,\cdots,n$，$\frac{m}{p}=\frac{j}{r}+\frac{m-1}{q}$，$0\leq j\leq m$，$1\leq p,q,r\leq\infty$。此外，对于 $u\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$，

$$\|u\|_{W^{j,p}}\leq C_m\|u\|^{\frac{m-j}{m}}_{L^q}\|u\|^{\frac{j}{m}}_{W^{m,r}}.\tag{2.7.11}$$

证明　对于 $j=0,m$，是显然成立的。我们设 $1\leq j\leq m-1$，分四步进行：

1. 如果 $1\leq p,q,r\leq\infty$ 满足 $\frac{2}{p}=\frac{1}{q}+\frac{1}{r}$，$i\in\{1,\cdots,n\}$，则对所有 $u\in C_0^2(\mathbb{R}^n)$，

$$\|\partial_i u\|^2_{L^p(\mathbb{R}^n)}\leq 8\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}\|u\|_{L^r(\mathbb{R}^n)}.\tag{2.7.12}$$

事实上，先设 $p<\infty$，令 $x=(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n$。由 (2.7.5)，

$$v(t)=u(x_1,\cdots,x_{i-1},t,x_{i+1},\cdots,x_n),$$

$$\int_{\mathbb{R}}|v'(t)|^p\mathrm{d}t\leq 8\left(\int_{\mathbb{R}}|v(t)|^q\right)^{\frac{p}{2q}}\left(\int_{\mathbb{R}}|v''(t)|^r\mathrm{d}t\right)^{\frac{p}{2r}}.$$

关于其他变量在 $\mathbb{R}^{n-1}$ 上积分，用 Hölder 不等式到右端 ($\frac{2q}{p}+\frac{2r}{p}=1$) 得证 (2.7.12)。对于 $p=\infty$，可令 $p\nearrow\infty$，即得。

2. 如果 $m\geq 2,1\leq p,q,r\leq\infty$ 满足 $\frac{m}{p}=\frac{1}{r}+\frac{m-1}{q},i\in\{1,\cdots,n\}$，则对于 $u\in C_0^m(\mathbb{R}^n)$

$$\|\partial_i u\|_{L^p}\leq 8^{2m-3}\|u\|^{\frac{m-1}{m}}_{L^q}\|\partial_i^m u\|^{\frac{1}{m}}_{L^r}.\tag{2.7.13}$$

关于 m 用归纳法，$m=2$ 时，(2.7.13) 成立，设对于不大于某 $m\geq 2$ 成立，设 $\frac{m+1}{p}=\frac{1}{r}+\frac{m}{q}$，取 t 满足 $\frac{m}{t}=\frac{1}{r}+\frac{m-1}{p}$。特别地，$\min\{p,r\}\leq t\leq \max\{p,r\}$ 这样 $1\leq t\leq\infty$。将 (2.7.13) 用到 $\partial_i u$，得

$$\|\partial_i^2 u\|_{L^t}\leq 8^{2m-3}\|\partial_i^{m+1}u\|_{L^r}^{\frac{1}{m}}\|\partial_i u\|_{L^p}^{\frac{m-1}{m}} \tag{2.7.14}$$

由 t 的定义以及 $\frac{2}{p}=\frac{1}{q}+\frac{1}{t}$，从第一步得

$$\|\partial_i u\|_{L^p}\leq 8\|\partial_i^2 u\|_{L^t}^{1/2}\|u\|_{L^q}^{1/2}, \tag{2.7.15}$$

至此即得 $m+1$ 时的 (2.7.13)。

3. (2.7.10) 式的证明：对 $m\geq 2$ 用归纳法。对于 $m=2$，由第一步可得。设对于某 $m\geq 2$，不等式 (2.7.10) 对所有的 $1\leq j\leq j-1$ 成立，设 $1\leq j\leq m$，$\frac{m+1}{p}=\frac{j}{r}+\frac{m+1-j}{q}$，定义 t 满足 $\frac{m}{p}=\frac{j-1}{r}+\frac{m+1-j}{t}$，可得

$$\begin{aligned}\frac{m+1-j}{t} &= \frac{m}{m+1}\frac{m+1}{p}-\frac{j-1}{r}\\ &= \frac{m}{m+1}\frac{m+1-j}{q}+\frac{m+1-j}{(m+1)r}\geq 0,\end{aligned}$$

这样 $0\leq t\leq\infty$，由此以及 $q,r\geq 1$ 可得

$$\frac{m+1-j}{t}=\frac{m}{m+1}\frac{m+1-j}{q}+\frac{m+1-j}{(m+1)r}\leq m+1-j.$$

这样，$t\geq 1$。用 (2.7.10)(用 $j-1$ 代 j)，得

$$\|\partial_i^j u\|_{L^p}\leq C_m\|\partial_i^{m+1}u\|_{L^r}^{\frac{j-1}{m}}\|\partial_i u\|_{L^t}^{\frac{m-j+1}{m}},$$

由上面 t 的定义以及 $\frac{m+1}{t}=\frac{1}{r}+\frac{m}{q}$，从第二步即可得

$$\|\partial_i u\|_{L^t}\leq 8^{2m-1}\|\partial_i^{m+1}u\|_{L^r}^{\frac{1}{m+1}}\|u\|_{L^q}^{\frac{m}{m+1}},$$

即得 $m+1$ 时的 (2.7.10)。

4. (2.7.11) 的证明：由第二步

$$\|u\|_{W^{1,p}}\leq 8^{2m-3}\|u\|_{L^q}^{\frac{m-1}{m}}\|u\|_{W_{m,r}}^{\frac{1}{m}}.$$

如同第三步即可得证 (2.7.11)。

接下来我们来证明 $u\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ 情形的 定理 2.7.1: 对于 $(m-j)r<n$，令 t 由 $\frac{1}{t}=\frac{1}{r}-\frac{m-j}{n}$ 定义，使得 $r<t<\infty$，将 Sobolev 不等式用到 j 阶导数的 u 得

$$\|u\|_{W^{j,t}}\leq C\|u\|_{W^{m,r}}.$$

令 s 满足 $\frac{m}{s}=\frac{j}{r}+\frac{m-1}{q}$ 使得 $\min\{q,r\}\leq s\leq\max\{q,r\}$。从插值不等式 (2.7.11) 得

$$\|u\|_{W^{j,s}}\leq C\|u\|_{L^q}^{\frac{m-j}{m}}\|u\|_{W^{m,r}}^{\frac{j}{m}}. \tag{2.7.16}$$

由定理条件以及 t,s 的定义得 $\frac{1}{p}=\frac{\theta}{t}+\frac{1-\theta}{s}$, $\theta=\frac{ma-j}{m-j}$。由于 $j/m\le a\le 1$, 我们看到 $0\le\theta\le 1$, 从 Hölder 不等式得

$$\|u\|_{W^{j,p}}\le\|u\|_{W^{j,t}}^{\theta}\|u\|_{W^{j,s}}^{1-\theta}\le C\|u\|_{W^{m,r}}^{\theta}\left(\|u\|_{L^q}^{\frac{m-j}{m}}\|u\|_{W^{m,r}}^{\frac{j}{m}}\right)^{1-\theta}.$$

这里用了 t 的定义以及 (2.7.16)。

对于 $(m-j)r\ge n$ 和 $a=1$, 注意到如果 $a=1$, 由定理条件得 $\frac{1}{p}=\frac{1}{r}-\frac{m-j}{n}\le 0$。这样仅有的可能是 $(m-j)r=n$ 和 $p=\infty$, 也即仅 $r=1$ 是可能的。由 Sobolev 不等式即得结论。

对于 $(m-j)r\ge n, a<1$, t 定义为 $\frac{m}{t}=\frac{j}{r}+\frac{m-1}{q}$, 使得 $\min\{q,r\}\le t\le\max\{q,r\}$。由插值不等式 (2.7.11) 得

$$\|u\|_{W^{j,t}}\le C\|u\|_{L^q}^{\frac{m-j}{m}}\|u\|_{W^{m,r}}^{\frac{j}{m}}. \tag{2.7.17}$$

如果定义 s 满足 $\frac{m-j}{s}=\frac{1}{r}+\frac{m-j-1}{p}$, 使得 $\min\{p,r\}\le s\le\max\{p,r\}$, 由 (2.7.11) 得

$$\|u\|_{W^{j+1,s}}\le C\|u\|_{W^{m,r}}^{\frac{1}{m-j}}\|u\|_{W^{j,p}}^{\frac{m-j-1}{m-j}}. \tag{2.7.18}$$

对于 $\alpha\in[0,1)$, $\alpha=\frac{(m-j)(a-j/m)}{1-a+(m-j)(a-j/m)}$, 使得 $\frac{1}{p}=\alpha\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{n}\right)+\frac{1-\alpha}{t}$。将一阶 G-N 不等式用到 u 的 j 阶导数估计得

$$\|u\|_{W^{j,p}}\le C\|u\|_{W^{j+1,s}}^{\alpha}\|u\|_{W^{j,t}}^{1-\alpha}. \tag{2.7.19}$$

综合 (2.7.17), (2.7.18) 和 (2.7.19) 得

$$\|u\|_{W^{j,p}}\le C\|u\|_{W^{m,r}}^{\frac{\alpha+(j/m)(1-\alpha)(m-j)}{\alpha+(1-\alpha)(m-j)}}\|u\|_{L^q}^{\frac{(1-j/m)(1-\alpha)(m-j)}{\alpha+(1-\alpha)(m-j)}}.$$

由 α 的定义得 $a=\frac{\alpha+(j/m)(1-\alpha)(m-j)}{\alpha+(1-\alpha)(m-j)}$, 至此定理即得证。

2.7.2 Leibniz 法则

定理 2.7.2 (Leibniz 法则) 设 $m\in\mathbb{N}$, $u,v\in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, 使得对于所有的 $\alpha\in\mathbb{N}^n$ 满足 $|\alpha|=m$, $\partial^\alpha u,\partial^\alpha v\in L^r(\mathbb{R}^n)$, 则

$$\begin{aligned}&\max_{|\alpha|=m}\|\partial^\alpha(uv)\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} \qquad (2.7.20)\\ \le\ & C_m\left(\max_{|\alpha|=m}\|\partial^\alpha u\|_{L^r(\mathbb{R}^n)}\|v\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}+\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\max_{|\alpha|=m}\|\partial^\alpha v\|_{L^r(\mathbb{R}^n)}\right).\end{aligned}$$

如果 $s>n/2$, 我们有

$$\begin{aligned}\|uv\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} &\le C_s(\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}\|v\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}+\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\|v\|_{H^s(\mathbb{R}^n)})\\ &\le C\|u\|_{H^s}\|v\|_{H^s}.\end{aligned} \tag{2.7.21}$$

这说明这时的 $H^s(\mathbb{R}^n)$ 是一个 Banach 代数。

证明 令 $\|\partial^m u\|_{L^r} = \max_{|\alpha|=m} \|\partial^\alpha u\|_{L^r}$。则对于任何 α 有

$$\|\partial^\alpha (uv)\|_{L^r} \le \sum_{\substack{\beta,\gamma \\ \beta+\gamma=\alpha}} \frac{(\beta+\gamma)!}{\beta!\gamma!} \|\partial^\beta u \partial^\gamma v\|_{L^r}$$

成立。设 $\frac{m}{p(\beta)} = \frac{|\beta|}{r} + \frac{m-|\beta|}{\infty}$, $\frac{m}{p(\gamma)} = \frac{|\gamma|}{r} + \frac{m-|\gamma|}{\infty}$, 由 Hölder 不等式、G-N 不等式以及 Young 不等式得上式的左边

$$\begin{aligned}
&\le \sum_{\substack{\beta,\gamma \\ \beta+\gamma=\alpha}} \frac{(\beta+\gamma)!}{\beta!\gamma!} \|\partial^\beta u\|_{p(|\beta|)} \|\partial^\gamma v\|_{L^{p(|\gamma|)}} \\
&\le \sum_{\substack{\beta,\gamma \\ \beta+\gamma=\alpha}} \frac{(\beta+\gamma)!}{\beta!\gamma!} \left[C_{\beta\gamma} \|\partial^m u\|_{L^r}^{|\beta|/m} \|u\|_{L^\infty}^{|\gamma|/m} \cdot C_{\beta\gamma} \|\partial^m v\|_{L^r}^{|\gamma|/m} \|v\|_{L^\infty}^{|\beta|/m} \right] \\
&\le \sum_{\substack{\beta,\gamma \\ \beta+\gamma=\alpha}} \frac{(\beta+\gamma)!}{\beta!\gamma!} C \left(\|\partial^m u\|_{L^r} \|v\|_{L^\infty} \right)^{\beta/m} \left(\|\partial^m v\|_{L^r} \|u\|_{L^\infty} \right)^{\gamma/m} \\
&\le C \left(\|\partial^m u\|_{L^r} \|v\|_{L^\infty} + \|u\|_{L^\infty} \|\partial^m v\|_{L^r} \right).
\end{aligned}$$

对于后者，只要用 Sobolev 不等式 $\|u\|_{L^\infty} \le C\|u\|_{H^s}, s > n/2$ 即可。

注 2.7.1 对于分数次的情形粗糙地说有

$$D^\alpha(uv) \approx u(D^\alpha v) + (D^\alpha u)v.$$

对于具有适当可微性的函数 F, 也有 $D^\alpha(F(u)) \approx F'(u)D^\alpha u$, 其中 D^α, $\alpha > 0$, 是分数次的微分算子。

一般情形，我们有

推论 2.7.1 如果 $u_1, \cdots, u_j \in L^\infty(\mathbb{R}^n), \partial^\alpha u_1, \cdots, \partial^\alpha u_j \in L^r(\mathbb{R}^n)$, 则对于 $\sum_1^j |\alpha_i| = m$,

$$\|\partial^\alpha u_1 \cdots \partial^\alpha u_j\|_{L^r} \le C_m \max_{1\le i\le j} \prod_{k\ne i} \|u_k\|_{L^\infty} \sup_{|\alpha|=m} \|\partial^\alpha u_i\|_{L^r}.$$

2.7.3 Moser 型估计

对于复合函数的导数，我们有下面的Moser **型估计**。

定理 2.7.3 设 $F(u)$ 充分光滑, $F(0) = 0$, $u = (u_1, \cdots, u_N) \in W^{s,p}(\mathbb{R}^n), 1 \le p \le +\infty$, $s \in \mathbb{N}$ 且

$$\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \le M, \tag{2.7.22}$$

则 $F(u) \in W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$, 且

$$\|F(u)\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n))} \le C(M)\|u\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)}. \tag{2.7.23}$$

证明　当 $s=0$ 时，是显然成立的。对于 $s\geq 1$(这时不需要条件 $F(0)=0$)，只要证

$$\|D^sF(u)\|_{L^p}\leq C(M)\|D^su\|_{L^p}.$$

为了方便，设 $u(x)$ 是实值函数，求导可得

$$\|D^sF(u)\|_{L^p}\leq C\sum_{1\leq\rho\leq s}\|\frac{\partial^\rho F(u)}{\partial u^\rho}\cdot(Du)^{\alpha_1}\cdot(D^2u)^{\alpha_2}\cdot\cdots\cdot(D^su)^{\alpha_s}\|_{L^p}\qquad(2.7.24)$$

其中 $\sum_{i=1}^s\alpha_i=\rho,\sum_{i=1}^s i\cdot\alpha_i=s$. 对于 $p_i=\frac{sp}{i\alpha_i}$ 用 Hölder 不等式，以及对于 $m=s,p=\infty,q=p$ 和 $p_i=\frac{sp}{i\alpha_i}$ 用 Gagliardo-Nirenberg 不等式，即可得结论。□

定理 2.7.4 若将 $F(0)=0$ 换成当 $|u|\leq M$ 时 $F(u)=O(|u|^{1+\alpha}),\alpha\geq 1$ 为整数，则

$$\|F(u)\|_{W^{s,r}(\mathbb{R}^n)}\leq C_s\|u\|_{W^{s,q}}\Pi_{i=1}^\alpha\|u\|_{L^{p_i}},\qquad(2.7.25)$$

其中 $\frac{1}{r}=\sum_{i=1}^\alpha\frac{1}{p_i}+\frac{1}{q},1\leq p_i,q,r\leq+\infty.$

$$\begin{aligned}\|F(u)-F(v)\|_{W^{s,r}}\leq\ & C_s(\|u-v\|_{L^p}(\|u\|_{W^{s,q}}+\|v\|_{W^{s,q}})\\ &+\|u-v\|_{W^{s,q}}(\|u\|_{L^p}+\|v\|_{L^p}))(\|u\|_{L^p}+\|v\|_{L^p})^{\alpha-1}\end{aligned}\qquad(2.7.26)$$

其中 $\frac{1}{r}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q},1\leq p,q\leq+\infty.$

证明　对于不等式 (2.7.25) 我们证明一个特例，即 $p_1=1,p_i=\infty,2\leq i\leq\alpha$. 注意到 $F(0)=F'(0)=\cdots=F^\alpha(0)=0,F^{1+\alpha}(0)\neq 0$, 可得 $F(u)=H(u)u^{1+\alpha},H(0)\neq 0$. 记 $G(u)=H(u)u$ 由乘积函数的估计得

$$\|F(u)\|_{W^{s,r}}\leq C_s(\|G(u)\|_{L^p}\|u\|_{W^{s,q}}+\|G(u)\|_{W^{s,q}}\|u\|_{L^p}).$$

再对 $G(u)$ 用不等式 (2.7.23)，然后对于 $r=q,p=\infty$ 反复应用乘积估计可得结论。

对于不等式 (2.7.26) 只要注意到 $F(u)-F(v)=G(u,v)(u-v)$, 其中 $G(u,v)=O(|u|^\alpha+|v|^\alpha)$, 用同样的方法可得。

推论 2.7.2 设 $F(u)$ 充分光滑，$F(0)=0$, $u=(u_1,\cdots,u_N)$, 且满足

$$\|u(t,\cdot)\|_{W^{[\frac{s}{2}],\infty}(\mathbb{R}^n)}\leq M,\forall t\geq 0,\qquad(2.7.27)$$

且使下述不等式右端出现的范数有意义，则

$$\|F(u(t,\cdot))\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n))}\leq C(M)\|u(t,\cdot)\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)},\forall t\geq 0.\qquad(2.7.28)$$

其中 $C(M)$ 是一个与 M 有关的常数，而 $1\leq p\leq+\infty$.

推论 2.7.3 若将 $F(0)=0$ 换成当 $|u|\leq M$ 时，$F(u)=O(|u|^{1+\alpha}),\alpha\geq 1$ 为整数，对任何整数 $t\geq 0$ 成立，则

$$\|F(u(t,\cdot))\|_{W^{s,r}(\mathbb{R}^n)}\leq C_s\|u(t,\cdot)\|_{W^{s,q}}\prod_{i=1}^\alpha\|u(t,\cdot)\|_{W^{[\frac{s}{2}],p_i}},\forall t\geq 0,\qquad(2.7.29)$$

其中 $\frac{1}{r}=\sum_{i=1}^\alpha\frac{1}{p_i}+\frac{1}{q},1\leq p_i,q,r\leq+\infty$。

以上两个不等式只要注意到

$$D^sF(u) = \sum_{1\le\rho\le s} C_s^\rho \frac{\partial^\rho F(u)}{\partial u^\rho} \cdot (Du)^{\alpha_1} \cdot (D^2u)^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot (D^su)^{\alpha_s},$$

$\sum_{i=1}^s \alpha_i = \rho$, $\sum_{i=1}^s i\cdot\alpha_i = s$ 中 $\alpha_{[\frac{s}{2}]+1},\cdots,\alpha_s$, 或全为零，或最多只能有一个为 1 而其余均为零，即可得以证明。

定理 2.7.5 设 $u \in L^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^N)$, $F \in C^m(\mathbb{R}^N)$, 且 $\partial^\alpha u \in L^r(\mathbb{R}^n), |\alpha| = m$, 则 $\partial^\alpha F(u) \in L^r(\mathbb{R}^n)$, 且如果 $m > 0$, 则有

$$\sup_{|\alpha|=m} \|\partial^\alpha F(u)\|_{L^r} \le C_m \sup_{1\le|\gamma|\le m} |(\partial^\gamma F)(u)| \|u\|_\infty^{|\gamma|-1} \sup_{|\alpha|=m} \|\partial^\alpha u\|_{L^r}.$$

而对于 $m = 0$, 有 $\|F(u) - F(0)\|_{L^r} \le M\|u\|_{L^r}$, 其中 M 是 F 的 *Lip* 常数。更一般地我们有

$$\begin{aligned} &\sup_{|\alpha|=m} \|\partial^\alpha(F(x,u(x)) - F(x,0))\|_{L^r} \\ \le\ & C'_m \sup_{\substack{1\le|\gamma|\le|\alpha| \\ |\alpha|+|\beta|=m}} \sup_{|v|\le\|u\|_{L^\infty}} |\partial_x^\alpha \partial_v^\gamma F(x,v)| \|u\|_{L^\infty}^{|\gamma|-1} \|\partial^\alpha u\|_{L^r} \\ +\ & C''_m \sup_{|\alpha|=m} \sup_{|v|\le\|u\|_{L^\infty}} |\partial_x^\alpha \partial_v F(x,v)| \|u\|_{L^r}. \end{aligned}$$

§2.8 Fourier 限制理论

众所周知，当 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ 时，其 Fourier 变换 $\hat{f}$ 是一个有界的连续函数，这样 $\hat{f}$ 在任何超曲面的限制是有意义的，或完全确定的。另一方面，如果 $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ 则 $\hat{f}$ 可以是 L^2 中的函数，但 L^2 函数是几乎处处有定义且在一个零测度集 (如超曲面) 上可以是任意的。问题是对于 $1 < p < 2$ 的 L^p 函数 f 我们是否可以给出 $\hat{f}$ 在一光滑超曲面 S 的限制呢? 这是现代 Fourier 分析中的一个基本问题，它与波动方程解的正则性有着密切的联系。如果我们取 S 是一个超平面，立刻可以得到否定的回答。事实上，设 $f(x_1,x') = u(x_1)v(x')$, $\hat{f}(\xi_1,\xi') = \hat{u}(\xi_1)\hat{v}(\xi')$, $x,\xi \in \mathbb{R}$, $x',\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}$, $\hat{f}$ 到超平面 $\xi_1 = 0$ 的限制仅当 $\hat{u}(0) = \int u(x)\mathrm{d}x$ 是完全确定时才能被完全确定。对任何 $p > 1$ 我们总可以找到一个 $u \in L^p(\mathbb{R})$, 使得 $\int u\mathrm{d}x$ 没有意义。这导致当 $p > 1$ 时 Fourier 变换在超平面上的限制是不能定义的。如果我们考虑具有非零曲率的超曲面就有不同的回答。为简单起见，我们考虑球面这个模型情形。

2.8.1 Stein-Thomas 定理

下面的结果是由 Stein 首先证明的，而后由 Thomas 推广，最后又由 Stein 给出的最后形式。

定理 2.8.1 *(Stein-Thomas)* 设 $\mathbb{S}^{n-1}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的标准的单位球面，$\mathrm{d}\sigma$ 是其标准的体积元素。设 $f \in L^p(\mathbb{R}^n), 1 \le p \le \frac{2(n+1)}{n+3}$，则 $Rf = \hat{f}\,|_{\mathbb{S}^{n-1}} \in L^2(\mathbb{S}^{n-1})$ 以及

$$\|Rf\|_{L^2(\mathbb{S}^{n-1})} \lesssim \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

这个定理有一个等价的对偶公式，定义 Stein 算子为 Fourier 限制算子 $Rf = \hat{f}\,|_{\mathbb{S}^{n-1}}$ 的共轭，

$$Sg(x) = R^*g(x) = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \mathrm{e}^{ix\xi} g(\xi)\mathrm{d}\sigma_\xi \simeq (g\mathrm{d}\sigma)^\vee(x),$$

其中 g 是一个定义在球面上的函数。

定理 2.8.2 设 $f \in L^2(\mathbb{S}^{n-1})$ 和 $\frac{2(n+1)}{n-1} \le p \le \infty$，则 $Sf \in L^p(\mathbb{R}^n)$ 且

$$\|Sf\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|f\|_{L^2(\mathbb{S}^{n-1})}. \tag{2.8.1}$$

注 2.8.1 只要对 $p = p_* = 2(n+1)/(n-1)$ 证明定理 *2.8.2*。事实上，对 $p > p_*$，由 Sobolev 不等式我们有

$$\|Sf\|_{L^p} \lesssim \|D^s Sf\|_{L^{p_*}}$$

对 $s = n(1/p_* - 1/p) > 0$，其中 $(D^s u)^\wedge(\xi) = |\xi|^s \hat{u}(\xi)$，但这里 $D^s Sf = S(|\cdot|^s f) = Sf$。这样，如果我们能证明定理当 $p = p_*$ 时成立，则对任何 $p \ge p_*$

$$\|Sf\|_{L^p} \lesssim \|Sf\|_{L^{p_*}} \lesssim \|f\|_{L^2(\mathbb{S}^{n-1})}.$$

注 2.8.2 如果我们用 $\mathrm{d}\mu = \psi\mathrm{d}\sigma$ 来取代 $\mathrm{d}\sigma, \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$，结果仍然是对的。因为这定理意味着

$$\|(f\mathrm{d}\mu)^\vee\|_{L^p} \lesssim \|f\psi\|_{L^2(\mathbb{S}^{n-1})} \lesssim \|f\|_{L^2(\mathbb{S}^{n-1})}.$$

此外，用单位分解，只要对 $Sf = (f\mathrm{d}\mu)^\vee$ 证明定理 *2.8.2*，其中 $\mathrm{d}\mu = \psi\mathrm{d}\sigma$ 和 $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ 支集在球面上一个点的一个小邻域中，虽然这是显然的，但这很重要，因为我们可以局部化一个估计式，这一点以后我们将看得更清楚。

注 2.8.3 (Knapp 反例) 由于下面的反例，定理 *2.8.2* 的结果对任何 $p < p_*$ 是不成立的。

对某个小 $\delta > 0$，定义相空间中的区域 $D = \{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi_1 - 1| < \delta^2, |\xi'| < \delta\}$，设 $f = \chi_{\mathbb{S}^{n-1}\cap D}$ 是 $\mathbb{S}^{n-1} \cap D$ 的特征函数，则

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{S}^{n-1})} = |\mathbb{S}^{n-1} \cap D|^{1/2} \sim \delta^{(n-1)/2}.$$

我们能把 Sf 写为

$$Sf(x) = \mathrm{e}^{ix_1} \int_{S\cap D} \mathrm{e}^{i\phi(x,\xi)} \mathrm{d}\sigma_\xi,$$

位相 $\phi(x,\xi) = x_1(\xi_1 - 1) + x' \cdot \xi'$。在物理空间中，我们可以固定一个区域

$$R = \{x \in \mathbb{R}^n : |x_1| < \frac{\pi\delta^{-2}}{6}, |x'| < \frac{\pi\delta^{-1}}{6}\}.$$

使得对于 $x \in \mathbb{R}^{n-1}$, $\xi \in D$, 我们有 $|\phi(x,\xi)| \le \pi/3$。因此, 当 $x \in \mathbb{R}^{n-1}$,

$$|Sf(x)| \ge \Re(\mathrm{e}^{-ix_1}Sf(x)) = \int_{\mathbb{S}^{n-1}\cap D} \cos(\phi(x,\xi))\mathrm{d}\sigma_\xi \ge 1/2|\mathbb{S}^{n-1}\cap D|$$

这意味着

$$\frac{\|Sf\|_{L^p}}{\|f\|_{L^2}} \gtrsim |\mathbb{S}^{n-1}\cap D|^{1/2}|R|^{1/p} \sim \delta^{\frac{n-1}{2}-\frac{n+1}{p}}$$

对于小的 δ, 像 (2.8.1) 这样的估计要成立就要求 $\frac{n-1}{2} - \frac{n+1}{p} \ge 0$, 这就是说仅有可能的 $p \ge p_* = 2\frac{n+1}{n-1}$。

这个例子提示我们算子 S 的结构中有抛物的标尺性质, 来自于球面的非零曲率。

定理 2.8.1 有另一个等价的公式, 我们可以用下面的抽象引理到 Stein 算子 $S : L^2(\mathbb{S}^{n-1}) \to L^p(\mathbb{R}^n)$ 后可以看到。

引理 2.8.1 *设 H 是一个 Hilbert 空间, B 是一个 Banach 空间, 用 B' 记其对偶, D 是 B 的一个稠密子空间。考虑一个线性算子 $T : D \to H$, 设 T^* 是其对偶, 由 $\langle T^*v, f\rangle_D = \langle v, Tf\rangle, \forall f \in D, v \in H$ 定义的共轭算子, 其中 $\langle , \rangle$ 是 H 中的内积, 则下面的叙述是等价的:*

1. 存在 $C, 0 \le C < \infty$, 使得对所有的 $f \in D$,

$$\|Tf\|_H \le C\|f\|_B;$$

2. $R(T^*) \subset B'$, 存在 $C, 0 \le C < \infty$ 使得对所有的 $v \in H$,

$$\|T^*v\|_{B'} \le C\|v\|_H;$$

3. $TT^* : B' \to B$ 是有界的;

4. $R(T^*T) \subset B'$, 存在 $C, 0 \le C < \infty$ 使得对所有的 $f \in D$,

$$\|T^*Tf\|_{B'} \le C^2\|f\|_B.$$

如果这些条件中的一个成立, 其他的算子 T, T^*T 就自动延拓到从 B 到 H, 和 B 到 B' 的有界算子。此外, 设 $\tilde{B}$ 是 B' 的一个闭子空间, 若把条件 2、3 换成

2' $R(T^*) \subset \tilde{B}$ 和 2 的不等式满足;

3' $R(T^*T) \subset \tilde{B}$ 和 3 的不等式满足。

则 2' 等价于 3' 且可推出 1。

证明 从 1 推得 2: 设 $v \in H$, 则对所有的 $f \in D$,

$$|\langle T^*v, f\rangle_D| = |\langle v, Tf\rangle| \le C\|v\|_H\|f\|_B.$$

2 推得 1: 设 $f \in D$, 则对所有的 $v \in H$,

$$|\langle v, Tf\rangle| = |\langle T^*v, f\rangle_D| \le \|T^*v\|_{B'}\|f\|_B \le C\|v\|_H\|f\|_B.$$

显然, 从 1 和 2 可推得 3。

3 可推得 1：设 $f \in D$, 则

$$\langle Tf, Tf\rangle = \langle T^*Tf, f\rangle_D \le \|T^*Tf\|_{B'}\|f\|_B \le C^2\|f\|_B^2.$$

2' 推得 2, 3' 推得 3 以及 $R(T^*T) \subset R(T^*)$, 是显然的。因此，从 2' 推得 3' 推得 1。另一方面，由定义 $R(T)^\perp \subset N(T^*)$, 因此，由正交分解 $H = \overline{R(T)} \oplus R(T)^\perp$, 我们有 $R(T^*) = T^*\overline{R(T)}$。但在条件 1, 2, 3 下，$T^*$ 是有界的，因此是连续的。

$$T^*\overline{R(T)} \subset \overline{T^*R(T)} = \overline{R(T^*T)} \subset \tilde{B}.$$

如果 $R(T^*T) \subset \tilde{B}$, 且 $\tilde{B}$ 是闭的。因此，从 1, 2, 3, 我们有 3' 推得 2' 成立。这样，3' 等价于 2'。

注 2.8.4 *2' 和 3' 应用在如下情形，B 有一个大的对偶空间，但我们知道 $T^*TB \subset \tilde{B}$, 其中 $(B, \tilde{B})$ 是一对偶对。对于一维的 SNL 方程，$B = L^{4/3}(I, L^1), \tilde{B} = L^4(I, L^\infty)$ 是一对例子。L^∞ 既不是自反的，又不是可分的。*

推论 2.8.1 *设 H, D 和两个三元组 $(B_i, T_i, C_i), i = 1, 2$ 满足引理的条件 1, 2, 3, 则对所有的 $i, j = 1, 2$, 我们有 $R(T_i^*T_j) \subset B_i'$ 且对所有的 $f \in D$*

$$\|T_i^*T_jf\|_{B_i'} \le C_iC_j\|f\|_{B_j}.$$

特别地，由算子 $T_i^*T_j$ 连续性可以延拓到从 B_j 到 B_i' 的一个有界算子，且上式对所有的 $f \in B_j$ 成立。

注 2.8.5 *TT^* 公式对 Stein 算子来说对应于球面上测度的 (逆)Fourier 变换的卷积。形式地，我们有*

$$SS^*f(x) = SRf(x) = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} e^{ix\xi}\hat{f}(\xi)\mathrm{d}\sigma_\xi = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{S}^{n-1}} e^{i(x-y)\xi}\mathrm{d}\sigma_\xi f(y)\mathrm{d}y = \mathrm{d}\sigma^\vee * f(x).$$

那么我们所需要证明的是对于 $p \ge p_*$,

$$\|\mathrm{d}\sigma^\vee * f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|f\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)}. \tag{2.8.2}$$

注 2.8.6 *从 SS^* 的卷积结构我们有越多有关 $\mathrm{d}\sigma^\vee$ 的信息，就越能了解算子 S 的性态。从 $\mathrm{d}\sigma^\vee$ 的大小的一个衰减估计我们就能得到：*

$$|\mathrm{d}\sigma^\vee(x)| \lesssim (1 + |x|)^{-\frac{n-1}{2}}. \tag{2.8.3}$$

如果我们试用 Young 不等式，有

$$\|\mathrm{d}\sigma^\vee * f\|_{L^p} \lesssim \|\mathrm{d}\sigma^\vee\|_{L^r}\|f\|_{L^{p'}}.$$

对于 $1 + 1/p = 1/r + 1/p'$, 这意味着 $r = p/2$, 且 (2.8.3) 说明当 $\frac{n-1}{2} \times \frac{p}{2} > n$ 时，$\mathrm{d}\sigma^\vee \in L^{p/2}$ ，这就给出 (2.8.2) 对 $p > \frac{4n}{n-1}$ 成立。若把 Young 不等式换为 Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式，我们也可以得到 $p = \frac{4n}{n-1}$ 的情形，但仍然离要求 $p = 2(n+1)/n-1$ 较远，这就是 Stein 的初始结果。

注 2.8.7 *另一个有意思的问题是限制定理与偏微分方程有明显的联系。事实上，如果 $u = \mathrm{d}\sigma^\vee * f$, 则 u 是线性椭圆方程 $\Delta u + u = 0$ 的解，因为*

$$\mathcal{F}(u + \Delta u)(\xi) \simeq (1 - |\xi|^2)\delta(1 - |\xi|)\hat{f}(\xi) = 0$$

我们将采用不同的方法与不同的观点来证明 定理 2.8.2。

2.8.2 解析插值证明

按照 注 2.8.6 和 注 2.8.1 只要证明 $Uf = \mathrm{d}\sigma^\vee * f$ 满足

$$\|Uf\|_{L^{p_*}(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|f\|_{L^{p'_*}(\mathbb{R}^n)}, \tag{2.8.4}$$

其中 $p_* = 2(n+1)/(n-1)$ 和 $p'_* = 2(n+1)/(n+3)$。一般，除一些特殊指数如 $p = 4, 6$ (仅发生在 $n = 2$ 或 $n = 3$) 外, 要直接得到 $L^{p'} - L^p$ 估计通常是非常复杂的，且我们不知道任何的直接的证明。在具体的估计中我们先作 $L^2 - L^2$ 估计，因为这时 Plancherel 定理是一个有力的工具，或 $L^1 - L^\infty$ 型估计, 因为震荡积分的逐点衰减估计可由稳定位相法得到；这建议我们对 L^p 空间使用插值理论。但 $L^2 - L^2$ 估计, 对于算子 U 来说是被排除的, 因为 Knapp 反例和 $L^\infty - L^1$ 估计太平凡，不能回答我们的问题。这里 Stein 插值定理显示了一定的威力，由于它允许我们从对不同于 U 的算子的 $L^2 - L^2$ 及 $L^\infty - L^1$ 估计得到 U 的 $L^{p'} - L^p$ 估计。

我们将通过构造一族卷积算子 $U_z f = \mu_z^\vee * f$, 其中 μ_z 是关于 z 有解析依赖性的分布, 来完成证明。参数 z 本质地反映了分布 μ_z 的齐性的次数。正因为这样, 自然把我们的目标放在 $z = -1$, 要求 $U_{-1} = U$ 或 $\mu_{-1} = \mathrm{d}\sigma$, 由于 $\mathrm{d}\sigma$ 能写成球面上 δ 分布 (-1 次齐次) 的拉回: $\mathrm{d}\sigma \simeq \delta(1 - |\xi|)\mathrm{d}\xi$。

对 U_z 的 $L^2 - L^2$ 估计将得到。事实上, 如果 μ_z 是一个有界函数，由 Plancherel 定理，我们有

$$\begin{aligned}\|U_z f\|_{L^2} &\simeq \|(U_z f)^\wedge\|_{L^2} \simeq \|\mu_z \cdot \hat{f}\|_{L^2} \\ &\lesssim \|\mu_z\|_{L^\infty} \|f\|_{L^2}.\end{aligned} \tag{2.8.5}$$

为要求 $\mu_z(\xi)$ 有界, 我们必须要求 $\mu_z(\xi)$ 本质上是 0 次齐次。因此，当 z 在直线 $\Re(z) = 0$ 时就能得到。当 $\mu_z^\vee$ 与一个有界函数一致时, 由于直接地我们有

$$\|U_z f\|_{L^\infty} \lesssim \|\mu_z^\vee\|_{L^\infty} \|f\|_{L^1} \tag{2.8.6}$$

对 U_z 的一个 $L^1 - L^\infty$ 估计仍然可以得到。为从 (2.8.5) 和 (2.8.6) 的解析插值得到 (2.8.4)，我们希望后者发生在直线 $\Re(z) = a$, 其中 a 满足

$$-1 = \theta a + (1-\theta)0,\ \frac{1}{p_*} = \frac{\theta}{\infty} + \frac{1-\theta}{2},\ \frac{1}{p'_*} = \frac{\theta}{1} + \frac{1-\theta}{2}.$$

当 $R(z) = a = -(n+1)/2$ 时, 上式成立。这个讨论导出了 Stein 解析插值定理的更细致的形式。

命题 2.8.1 *设 U_z 是一线性算子的解析族，使得:*

i) $U_{-1} = U$;

ii) $\|U_z f\|_{L^2} \lesssim \|f\|_{L^2}$ ，*在线 $R(z) = 0$ 上是一致的;*

iii) $\|U_z f\|_{L^\infty} \lesssim \|f\|_{L^1}$, *在线 $\Re(z) = -(n+1)/2$ 上是一致的。则我们得到*

$$\|Uf\|_{L^{p_*}} \lesssim \|f\|_{L^{p'_*}}.$$

上面的讨论说明, 当我们把 U_zf 写成 $\mu_z^\vee * f$ 时, 命题的假设就能满足, 只要 μ_z 是一个满足下述条件的解析分布族:

1. $\mu_{-1} = \mathrm{d}\sigma$;
2. $\mu_z(\xi)$ 与有界函数一致, 在 $\Re(z) = 0$ 上是一致有界的。
3. $\mu_z^\vee(z)$ 与有界函数一致, 在 $\Re(z) = -(n+1)/2$ 上是一致有界的。

这样留下来的任务是定义满足上述性质的分布族 μ_z。由恒等式 $\delta = \chi_+^{-1}$和$\mathrm{d}\sigma_\xi \simeq \delta(1-|\xi|)$ 的启发, 我们定义分布族

$$\mu_z(\xi) = \mathrm{e}^{z^2}\chi_+^z(1-|\xi|)\psi(|\xi|), \tag{2.8.7}$$

其中 $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ 是支集在 1 的某小邻域 (如 $[1/2, 3/2]$) 且 $\psi(1) = 1$ 的截断族。我们回顾齐次分布 χ_+^z, 当 $\Re(z) > -1$ 时, 此分布与函数

$$\chi_+^z(t) = \begin{cases} t^z/(\Gamma(z+1)) & \text{如果} \, t \geq 0, \\ 0 & \text{如果} \, t < 0, \end{cases}$$

一致, 其中 Γ 函数是由 $\Gamma(z+1) = \int_0^\infty t^z e^{-t}\mathrm{d}t$ 定义的。从恒等式 $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, 得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\chi_+^z(t) = \chi_+^{z-1}(t). \tag{2.8.8}$$

应用这个公式, 通过重复使用分步积分, χ_+^z 能解析延拓到 $z \in \mathbb{C}$。具体地, 我们首先注意到对 $\Re(z) > -1, \phi \in C_0^\infty$ 我们有

$$\int \chi_+^z(t)\phi(t)\mathrm{d}t = -\int \chi_+^{z+1}(t)\phi'(t)\mathrm{d}t = \cdots = (-1)^m \int \chi_+^{z+m}(t)\phi^{(m)}(t)\mathrm{d}t.$$

这样分步积分充分多次我们能使 $\int \chi_+^z \phi \mathrm{d}t$ 当 $\Re(z) > -1-m$ 对任何 m 有意义。为了看到 $\chi_+^{-1} = \delta$, 只要取一个分步积分。事实上

$$\int \chi_+^{-1}\phi\mathrm{d}t = -\frac{1}{\Gamma(1)}\int_0^\infty \phi'(t)\mathrm{d}t = \phi(0).$$

对于更多的关于 χ_+^z 的信息以及分布理论, 人们可以参考 Gel'fand 和 Shilov 及 Hörmanler 的书。在 μ_z 的定义中因子 e^{z^2} 的选取是为了保证我们的算子对 $\Im(z)$ 的一致有界性。事实上, 当 $\Im(z) \to \infty$ 时 e^{z^2} 指数衰减, 在直条形 $-(n+1)/2 \leq \Re(t) \leq 0$ 上是一致的。这允许我们在下面的不等式中的常数的变化有 $b = \Re(z)$ 的多项式增长。

显然, $\mu_{-1} \simeq \delta(1-|\xi|)\psi(|\xi|) \simeq \mathrm{d}\sigma$。条件 2 立即满足, 由于 χ_+^{-z} 当 $\Re(z) = 0$ 时总是一个有界函数; 条件 3 将来自于稳定位相的讨论, 更一般地我们有:

命题 2.8.2

$$|\mu_z^\vee(x)| \lesssim (1+|x|)^{-\Re(z)-1-\frac{n-1}{2}} \tag{2.8.9}$$

证明 用极坐标,$\xi = rw$, 我们有

$$\mu_z^\vee(t) = \mathrm{e}^{z^2}\int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \mathrm{e}^{irx\cdot w}\mathrm{d}\sigma_w\right)\chi_+^z(1-r)\psi(r)r^{n-1}\mathrm{d}r.$$

回顾在 suppψ 中 r 接近 1, 内积是 dσ 的 Fourier 变换且可由 Bessel 函数精确地表示, 但用震荡积分估计我们需要的只是它能写成

$$\mathrm{d}\sigma^\vee(y)=\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\mathrm{e}^{iyw}\mathrm{d}\sigma_w=\sum_{\pm}\mathrm{e}^{\pm i|y|}a_\pm(|y|).$$

其中震幅 $a_\pm$ 是具有下列衰减性质的光滑函数,

$$|\partial^k a_\pm(\lambda)|\lesssim(1+|\lambda|)^{-\frac{n-1}{2}-k}\tag{2.8.10}$$

则

$$\mu_z^\vee(x)=\mathrm{e}^{z^2}\sum_{\pm}\int_0^\infty\mathrm{e}^{\pm ir|x|}\chi_+^z(1-r)a_\pm(r|x|)\psi(r)r^{n-1}\mathrm{d}r.$$

在 $a_\pm$ 的变量中的因子 r 的出现有些麻烦, 但由于 r 本质上是 1, 我们只要估计

$$I(x)=a_\pm(x)\int\chi_+^z(1-r)\mathrm{e}^{\pm ir|x|}\psi(r)r^{n-1}\mathrm{d}r.$$

由于 χ_+^z 不是一个函数, 上述积分我们应在分布意义下理解。当 $\Re(z)=-(n+1)/2\leq-1$ 时, 重复使用分步积分, 用 (2.8.8) 我们把积分转换成

$$I(x)=a_\pm(x)\int_0^{+\infty}\chi_+^{z+k}(1-r)\partial_r^k(\mathrm{e}^{\pm ir|x|}\psi(r)r^{n-1})\mathrm{d}r,$$

选取 k 使得 $-1<\Re(z)+k\leq 0$, 则从 (2.8.10) 和下面的 引理 2.8.2, 得到

$$|I(x)|\lesssim(1+|x|)^{-\frac{n-1}{2}}(1+|x|)^k(1+|x|)^{-\Re(z)-k-1}.$$

类似地能重新得到对 $\mu_z^\vee$ 的一个严格结果, 但我们得保持 a 的导数的迹与前一样。取 k 使得 $-1<\Re(t)+k\leq 0$, 分步积分 k 次,

$$\mu_z^\vee(x)=\mathrm{e}^{z^2}\int\chi_+^{z+k}(1-r)\partial_r^k[\mathrm{e}^{\pm ir|x|}\psi(r)r^{n-1}a_\pm(r|x|)]\mathrm{d}r.$$

在各个因子上分摊导数, 这就成为形如

$$\int\chi_+^{z+k}(1-r)\partial_r^{k'}[\mathrm{e}^{\pm ir|x|}\psi(r)r^{n-1}]|x|^{k''}(\partial^{k''}a_\pm)(r|x|)\mathrm{d}r$$

的诸项的和, $k=k'+k''$, 我们看到在 $a_\pm$ 每增加一次导数就会给被积函数添加一个因子 $|x|$, 这立刻可以通过 (2.8.10) 增加衰减性得到平衡。因此, 由 引理 2.8.2, 我们得到

$$|I_{h_jk}(x)|\lesssim(1+|x|)^{-\Re(z)-k-1}|x|^{k''}(1+|x|)^{-\frac{n-1}{2}-k''}.$$

引理 2.8.2 设 $\phi\in C_o^\infty(\mathbb{R})$, $-1<a\leq 0$, $b\in\mathbb{R}$, 则

$$|\int_0^\infty\mathrm{e}^{i\lambda t}t^{a+ib}\phi(t)\mathrm{d}t|\lesssim(1+b^2)(1+|\lambda|^{-a-1}(\|\phi\|_{L^\infty}+\|\phi'\|_{L^1})).$$

证明 当 $|\lambda| \le 1$ 时, 我们只要取绝对值且用 $\int_0^1 t^a \mathrm{d}t < \infty$。当 $|\lambda| > 1$ 时, 我们将积分分为两部分: $0 < t < |\lambda|^{-1}$ 和 $|\lambda|^{-1} < t < \infty$。对于第一部分我们直接就有

$$|\int_0^{1/|\lambda|} \mathrm{e}^{i\lambda t} t^{a+ib} \phi(t)\mathrm{d}t| \lesssim \|\phi\|_{L^\infty} \int_0^{1/|\lambda|} t^a \mathrm{d}t \lesssim |\lambda|^{-a-1} \|\phi\|_{L^\infty}.$$

对于第二部分记 $\phi(t) = -\int_t^\infty \phi'(s)\mathrm{d}s$, 则

$$\begin{aligned}|\int_{1/|\lambda|}^\infty \mathrm{e}^{i\lambda t} t^{a+ib}\phi(t)\mathrm{d}t| &= |\int\int_{\frac{1}{|\lambda|}<t<s} \mathrm{e}^{i\lambda t} t^{a+ib} \phi'(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t| \\ &\le \|\phi'\|_{L^1} \sup_s |\int_{1/|\lambda|}^s \mathrm{e}^{i\lambda t} t^{a+ib} \mathrm{d}t|.\end{aligned}$$

通过分部积分, 容易看到对于每个 $-1 < a \le 0$, 我们有

$$\int_{1/|\lambda|)}^s \mathrm{e}^{i\lambda t} t^{a+ib}\mathrm{d}t \lesssim \frac{1+b^2}{|\lambda|^{1+a}}.$$

我们能修改在上面的证明中的讨论建立下面更一般的限制定理的方式, 打破其对称性, 考虑沿不同方向不同指数的不等距的 L^p 范数。

定理 2.8.3 固定一个单位向量 w, 记 $\mathbb{R}^n$ 中的元素为 $x = (x_w, x')$, 其中 $x_w = (x \cdot w)$ 是 x 沿 w 方向的投影, $x' = x - x_w$ 是 x 正交于 w 的分量。对 $0 \le \lambda < 1$ 我们有

$$\|Sf\|_{L^q_{x_w} L^r_{x'}} \lesssim \|f\|_{L^2(\mathbb{S}^{n-1})},$$

其中 $q = \frac{2(n+1-2\lambda)}{n-1}, r = \frac{2(n+1-2\lambda)}{n-1-2\lambda}$。如果 $n=2$, 我们还得要求 $\lambda \le 1/2$。

注意: 对 $\lambda = 0$, 我们恢复到通常的限制定理, $p = q = r = 2(n+1)/(n-1)$。

证明 由对称性, 我们可以取 $w = (1, 0, \cdots, 0), x = (x_1, x')$。只要证明算子 $U_f = \mathrm{d}\sigma^\vee * f$ 是从 $L^{q'}_{x_1} L^{r'}_{x'}(\mathbb{R}^n)$ 到 $L^q_{x_1} L^r_{x'}(\mathbb{R}^n)$ 的有界算子, 其中 $\frac{1}{q'} + \frac{1}{q} = 1, \frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = 1$。

考虑与前相同的解析族 U_z, 回顾其核 $\mu_z^\vee$ 满足 (2.8.9)。因此, 对 $\Re(z) = -\frac{n+1}{2} + \lambda$, 我们有

$$|\mu_z^\vee(x)| \lesssim (1 + |x_1|)^{-\lambda}. \tag{2.8.11}$$

当 $0 \le \lambda < 1$ 时, 我们用上式可得

$$\|U_z f(x_1, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{n-1})} \lesssim \int \frac{1}{|x_1 - y_1|^\lambda} \|f(y_1, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}^{n-1})}\mathrm{d}y.$$

由于 $\frac{1}{q} - \frac{1}{q'} = 1 - \lambda$ 意味着 $q = 2/(2-\lambda), q' = 2/\lambda$, 应用 Hardy - Littlewood - Sobolev 不等式我们得到

$$\|U_z f\|_{L^{2/\lambda}_{x_1} L^\infty_{x'}(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|f\|_{L^{2/(2-\lambda)}_{x_1} L^1_{x'}(\mathbb{R}^n)} \tag{2.8.12}$$

对所有满足 $\Re(z) = -(n+1)/2 + \lambda$ 的 z 成立。我们已经知道

$$\|U_z f\|_{L^2_{x_1} L^2_{x'}(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|f\|_{L^2_{x_1} L^2_{x'}(\mathbb{R}^n)} \tag{2.8.13}$$

对满足 $\Re(z)=0$ 的所有 z 成立。这样我们能应用 Stein 的插值定理（一个带混合范数的修改方式）来对 (2.8.12) 和 (2.8.13) 插值，得到对 U_{-1} 的一个估计

$$\|U_{-1}f\|_{L^{q'}_{x_1}L^{r'}_{x'}} \lesssim \|f\|_{L^q_{x_1}L^r_{x'}},$$

其指数满足 $\frac{1}{r}=\frac{\theta}{\infty}+\frac{1-\theta}{2}, \frac{1}{q}=\frac{\theta}{2/\lambda}+\frac{1-\theta}{2}, -1=\theta(\lambda-\frac{n+1}{2})+(1-\theta)0$，这就得到

$$\theta=\frac{2}{n+1-2\lambda}, \frac{1}{r}=\frac{n-1-2\lambda}{2(n+1-2\lambda)}, \frac{1}{q}=\frac{n-1}{2(n+1-2\lambda)}.$$

限制定理的上面的方式建议我们有下面的证明方法，它将基于一个合适的方向的选取以及把问题看成是一个演化问题，这样的方向扮演了时间的角色，这个观点在波动方程中特别有用。

2.8.3 演化算子方法证明

在这一节我们对 f 作下列假设：

$$f\in C^\infty(\mathbb{S}^{n-1}), \mathrm{Supp} f\subset\{\xi_1>1/2\} \tag{2.8.14}$$

用这个假设把 $x_1=t$ 作为时间参数，重写 Sf 为

$$\begin{aligned} Sf(t,x') &= \int_{|\xi'|<\sqrt{3}/2} \mathrm{e}^{it\sqrt{1-|\xi'|^2}}\mathrm{e}^{ix'\xi'}f(\sqrt{1-|\xi'|^2},\xi')\frac{\mathrm{d}\xi'}{\sqrt{1-|\xi'|^2}}\\ &= \int \mathrm{e}^{it\sqrt{1-|\xi'|^2}}\mathrm{e}^{ix'\xi'}\beta(|\xi'|)g(\xi')\mathrm{d}\xi', \end{aligned}$$

其中 $\beta\in C_0^\infty$ 支集在 $|\xi'|<\sqrt{3}/2$ 和 $g(\xi')=f(\sqrt{1-|\xi'|^2},\xi')/\sqrt{1-|\xi'|^2}$ 中。由 f 在支集上的假设可得

$$\int|g(\xi')|^2\mathrm{d}\xi' \backsimeq \int_{\mathbb{S}^{n-1}}\frac{|f(\xi)|^2}{|\xi|}\mathrm{d}\sigma_\xi \simeq \|f\|^2_{L^2(\mathbb{S}^{n-1})}$$

.

定理 2.8.4 设 $\beta\in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$ 的支集在单位球 $\{\xi\in\mathbb{R}^{n-1}:|\xi|<1\}$ 中，考虑算子

$$Tg(t,x)=\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\mathrm{e}^{it\sqrt{1-|\xi|^2}}\mathrm{e}^{ix\xi}\beta(|\xi|)g(\xi)\mathrm{d}\xi,\ t\in\mathbb{R},\ x\in\mathbb{R}^{n-1}.$$

设 q,r 是满足下列假设的 Lebesgue 指数：

$$0\le\frac{2}{q}\le\min\{1,\gamma(r)\}, \tag{2.8.15}$$

$$\left(\frac{2}{q},\gamma(r)\right)\neq(1,1), \tag{2.8.16}$$

其中 $\gamma(r)=(n-1)(1/2-1/r)$。则下述估计对所有 $g\in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$ 成立，

$$\|Tg\|_{L^q_tL^\gamma_x}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{n-1})\lesssim\|g\|_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})} \tag{2.8.17}$$

由 注 2.8.2 , 定理 2.8.2 来自于特殊情形 $q=r=2\frac{n+1}{n-1}$。我们将看到条件 (2.8.16), 当 $n\neq 3$ 时能去掉, 这是 Keel & Tao 最近的结果。我们先计算 T^* 和 TT^*。

$$\begin{aligned}\langle T^*F,g\rangle &= \langle F,Tg\rangle=\int\int F\overline{Tg}\mathrm{d}t\mathrm{d}x\\ &= \int\int F(t,x)\int \mathrm{e}^{-it\sqrt{1-|\xi|^2}}\mathrm{e}^{-ix\xi}\overline{\beta(|\xi|)g(\xi)}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}t\mathrm{d}x\\ &= \int\overline{\beta(\xi)}(\int\int \mathrm{e}^{-it\sqrt{1-|\xi|^2}}\mathrm{e}^{-ix\xi}F(t,x)\mathrm{d}t\mathrm{d}x)\overline{g}\mathrm{d}\xi.\end{aligned}$$

因此, $T^*F(\xi)=\overline{\beta(\xi)}\int\int \mathrm{e}^{-it\sqrt{1-|\xi|^2}}\mathrm{e}^{-ix\xi}F(t,x)\mathrm{d}t\mathrm{d}x$,

$$\begin{aligned}TT^*F(t,x) &= \int \mathrm{e}^{it\sqrt{1-|\xi|^2}}\mathrm{e}^{ix\xi}\beta(\xi)T^*F(\xi)\mathrm{d}\xi\\ &= \int\int \mathrm{e}^{i(t-s)\sqrt{1-|\xi|^2}}\mathrm{e}^{ix\xi}|\beta(\xi)|^2\hat{F}(s,\xi)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

其中 $\hat{F}(s,\xi)=\int \mathrm{e}^{-ix\xi}F(s,x)\mathrm{d}x$。如果我们引进一族算子

$$U(t)f(x)=\int \mathrm{e}^{it\sqrt{1-|\xi|^2}}\mathrm{e}^{ix\xi}|\beta(\xi)|^2\hat{f}(\xi)\mathrm{d}\xi,$$

能把 TT^* 写成一个卷积算子。

$$TT^*F(t,\cdot)=\int U(t-s)F(s,\cdot)\mathrm{d}s. \tag{2.8.18}$$

由 引理 2.8.1, 为了说明 T 是一个从 $L_t^qL_x^r(\mathbb{R}^n)$ 到 $L^2(\mathbb{R}^{n-1})$ 的有界算子, 只要说明 TT^* 是一个从 $L_t^{q'}L_x^{r'}(\mathbb{R}^n)$ 到 $L_t^qL_x^r(\mathbb{R}^n)$ 的有界算子。我们将首先证明对 $U(t)$ 的一个估计。

命题 2.8.3 设 $2\leq r<\infty$ 和 $\gamma(r)=(n-1)(1/2-1/r)$, 则 $U(t)$ 满足估计

$$\|U(t)f\|_{L^r(\mathbb{R}^{n-1})}\lesssim(1+|t|)^{-\gamma(r)}\|f\|_{L^{r'}(\mathbb{R}^{n-1})} \tag{2.8.19}$$

证明 一旦我们证明了 $r=2$ 和 $r=\infty$ 两种情况, 即

$$\|U(t)f\|_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})}\lesssim\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})} \tag{2.8.20}$$

$$\|U(t)f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{n-1})}\lesssim(1+|t|)^{-(n-1)/2}\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^{n-1})} \tag{2.8.21}$$

则结果来自于标准的 Riesz 插值定理。利用 Plancherel 公式我们立即可以得到 (2.8.20), 因为

$$(U(t)f)^\wedge(\xi)\simeq \mathrm{e}^{it\sqrt{1-|\xi|^2}}|\beta(\xi)|^2\hat{f}(\xi)$$

为证明 (2.8.21), 我们把 $U(t)f$ 写为

$$U(t)f(x)=\int K_t(x-y)f(y)\mathrm{d}y,$$

其中

$$\begin{aligned}
K_t(x) &= \int \mathrm{e}^{it\sqrt{1-|\xi|^2}}\mathrm{e}^{ix\xi}|\beta(\xi)|^2\mathrm{d}\xi \\
&\simeq \int\int \mathrm{e}^{ix\xi}\mathrm{e}^{it\tau}\delta(1-\tau^2-|\xi|^2)\sqrt{1-|\xi|^2}|\beta(\xi)|^2\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\xi \\
&\simeq \int\int \mathrm{e}^{i(t,x)(\tau,\xi)}\delta(1-|(\tau,\xi)|)\beta_1(\tau,\xi)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\xi, \\
&\quad (\beta_1(\tau,\xi)=\tau|\beta(\xi)|^2)=(\beta_1\mathrm{d}\sigma_{n-1})^{\vee}(t,x).
\end{aligned}$$

这里我们利用了关系式 $\int f(x)\delta(\phi(x))\mathrm{d}x = \int_{\phi(x)=0} f(x)\frac{\mathrm{d}S_x}{|\nabla\phi|}$。因此，$K_t$ 是支集在 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上的一个测度的 Fourier 变换，对于这个 K_t 有下面的衰减估计

$$|K_t(x)| \lesssim (1+|t|+|x|)^{-(n-1)/2}.$$

这就证明了 (2.8.21)。

下面我们应用 命题 2.8.3 到 (2.8.18),

$$\|TT^*F(t,\cdot)\|_{L_x^r} \lesssim \int \frac{1}{(1+|t-s|)^{\gamma(r)}}\|F((s,\cdot)\|_{L_x^{r'}}\mathrm{d}s \tag{2.8.22}$$

最后, 应用 Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式, 如果 $0<\gamma(r)<1$, 得到

$$\|TT^*F\|_{L_t^qL_x^r} \lesssim \|F\|_{L_t^{q'}L_x^{r'}}$$

当 $-\gamma(r)+1+\frac{1}{q}=\frac{1}{q'}$ 时成立, 因此, $\gamma(r)=\frac{2}{q}$。这就说明了当 $0<\gamma(r)=\frac{2}{q}<1$ 时的 定理 2.8.4。

另一方面, 如果 $q=2$ 和 $\gamma(r)>1$。从 (2.8.22) 得到

$$\|TT^*F\|_{L_t^2L_x^r} \lesssim \|F\|_{L_t^2L_x^{r'}},$$

是标准的 Hausdorff-Young 不等式的应用。最后，如果 $\frac{2}{q}<1$ 和 $\gamma(r)>\frac{2}{q}$，使用 Sobolev 不等式就得到 $\gamma(r)=\frac{2}{q}$ 的情形。

2.8.4　双线性形式证明 ($n=2$ 和 $n=3$)

我们现在给出证明一些特殊情形的球面限制定理, 即 $n=2, p=4$ 或 $n=3, p=6$。其思想是当 p 是偶整数时, 限制定理能看成是一个多线性形式的 L^2 估计, 这种形式通过 Fourier 变换有一个提供某种光滑效应的卷积结构。

首先考察 $n=3$ 的情形, 我们考虑 Stein 算子 $Sf=(f\mathrm{d}\sigma)^{\vee}$, 使用事实 $(Sf\cdot Sf)^{\wedge}\simeq(f\mathrm{d}\sigma)*(f\mathrm{d}\sigma)$。令 $B(f,g)=Sf\cdot Sg$, 则对 Sf 的 L^4 估计对应于一个对 $B(f,f)$ 的 L^2 估计。我们有

$$\hat{B}(f,g)(\xi)=(f\mathrm{d}\sigma)*(g\mathrm{d}\sigma)(\xi)\simeq\int_{\mathbb{R}^3}\delta(1-|\xi-\eta|)\delta(1-|\eta|)f(\xi-\eta)g(\eta)\mathrm{d}\eta.$$

关于测度 $\delta(1-|\xi-\eta|)\delta(1-|\eta|)\mathrm{d}\eta$, 用 Cauchy-Schwartz 不等式我们发现

$$|\hat{B}(f,g)(\xi)|^2 \leq \hat{B}(1,1)(\xi)\hat{B}(|f|^2,|g|^2)(\xi)$$

关于 ξ 积分, 得

$$\|B(f,g)(\xi)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} \lesssim A\|f\|^2_{L^2(\mathbb{S}^2)}\|g\|^2_{L^2(\mathbb{S}^2)} \tag{2.8.23}$$

$$A=\sup_{\xi}|\hat{B}(1,1)(\xi)| = \sup_{\xi}\int \delta(1-|\xi-\eta|)\delta(1-|\eta|)\mathrm{d}\eta \tag{2.8.24}$$

这样, 为在这种情形证明定理, 我们只要验证 A 是有限的。对 $A(\xi)=\hat{B}(1,1)(\xi)$ 作精确的演算将是有用的。对任何维数 $n\geq 2$, 我们有:

引理 2.8.3

$$A(\xi)=\int_{\mathbb{R}^n}\delta(1-|\xi-\eta|)\delta(1-|\eta|)\mathrm{d}\eta \simeq \frac{1}{|\xi|}(4-|\xi|^2)_+^{\frac{n-3}{2}} \tag{2.8.25}$$

证明　利用 $\delta(\phi(x))=g(x)\delta(g(x)\phi(x))$

$$\begin{aligned}
A(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n}\delta(1-|\xi-\eta|)\delta(1-|\eta|)\mathrm{d}\eta\\
&\simeq \int_{|\eta|=1}\delta(1-|\xi-\eta|^2)\mathrm{d}\sigma_\eta = \int_{|\eta|=1}\delta(|\xi|^2-2\xi\eta)\mathrm{d}\sigma_\eta\\
&\simeq \frac{1}{|\xi|}\int_{|\eta|=1}\delta(\frac{|\xi|}{2}-\frac{\xi}{|\xi|}\cdot\eta)\mathrm{d}\sigma_\eta.
\end{aligned}$$

由于旋转的对称性, 我们可以假设 $\xi=(|\xi|,0,\cdots,0)$, 使得当 $|\xi|/2\in[-1,1]$

$$\begin{aligned}
A(\xi) &\simeq \frac{1}{|\xi|}\int_0^\pi \delta(\frac{|\xi|}{2}-\cos\theta)(\sin\theta)^{n-2}\mathrm{d}\theta\\
&= \frac{1}{|\xi|}\int_{-1}^1 \delta(\frac{|\xi|}{2}-u)(1-u^2)^{\frac{n-3}{2}}\mathrm{d}u\\
&= \frac{1}{|\xi|}(1-\frac{|\xi|^2}{4})^{\frac{n-3}{2}}.
\end{aligned}$$

当 $n=3$, $A(\xi)\simeq\frac{1}{|\xi|}$ 的奇性仅在 $\xi=0$, 但我们可以假设 f 和 g 的支集在 $\mathbb{S}^2$ 中的一个点的一个小邻域中, 就可以避免这一困难 (不失一般性, 我们能局部估计到球面的一个小邻域)。那么 (2.8.24) 中的上确界只是取在所有 $\xi\in\mathrm{Supp}(g)+\mathrm{Supp}(f)$ 上, 这是一个远离 O 的有界集。因此, 我们可以在 (2.8.24) 中限制 $|\xi|\geq c>0$, 奇性消失, $A<\infty$。

从双线性形式 $B(f,g)$ 的 L^2 估计 (2.8.23), 就得到了 Stein 算子 Sf 的 L^4 估计:

$$\|Sf\|^2_{L^4(\mathbb{R}^3)}=\|B(f,f)\|_{L^2}\simeq A^{1/2}\|f\|^2_{L^2(\mathbb{S}^2)}.$$

对于支集在球面的一个小片上的 f 成立。

在 $n=2$ 的情形，我们要的是对 Sf 的 L^6 估计。由于 $6=3\times 2$ 我们能用三线性形式重复同样演算，$T(f,g,h)=Sf\cdot Sg\cdot Sh$ 和 $\|Sf\|_{L^6}^3=\|T(f,f,f)\|_{L^2}$。我们有

$$\begin{aligned}&\hat{T}(f,g,h)(\xi)\simeq(f\mathrm{d}\sigma)*(g\mathrm{d}\sigma)*(h\mathrm{d}\sigma)\\=&\int\int_{\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2}\delta(1-|\xi-\eta-\zeta|)\delta(1-|\eta|)\delta(1-|\xi|)f(\xi-\eta)g(\eta)h(\zeta)\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta.\end{aligned}$$

关于测度 $\delta(1-|\xi-\eta|)\delta(1-|\eta|)\delta(1-|\xi|)\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta$ 应用 Caudhy-Schwarz 不等式得

$$|\hat{T}(f,g,h)(\xi)|^2\leq\hat{T}(1,1,1)(\xi)\hat{T}(|f|^2,|g|^2,|h|^2)(\xi).$$

关于 ξ 积分，得

$$\|T(f,g,h)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2\lesssim A\|f\|_{L^2(\mathbb{S}^1)}^2\|g\|_{L^2(\mathbb{S}^1)}^2\|h\|_{L^2(\mathbb{S}^1)}^2.\tag{2.8.26}$$

$$A=\sup_\xi|\hat{T}(1,1,1)(\xi)|=\sup_\xi\int\int\delta(1-|\xi-\eta|-\zeta)\delta(1-|\eta|)\delta(1-|\zeta|)\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta\tag{2.8.27}$$

卷积结构允许我们限制 ξ 到集 $\mathrm{Supp}f+\mathrm{Supp}g+\mathrm{Supp}h$, 如果我们假设 f,g,h 支集在球面的一小片中的话，我们能假设 $1\leq|\xi|\leq 3$, 用 引理 2.8.3 我们能估算 $T(1,1,1)$, 说明 A 是有界的。

$$\begin{aligned}&T(1,1,1)(\xi)=\int B(1,1)(\xi-\zeta)\delta(1-|\zeta|)\mathrm{d}\zeta\\\sim&\int_{|\xi-\zeta|<2}\frac{\delta(1-|\zeta|)}{(4-|\xi-\zeta|^2)^{1/2}}\mathrm{d}\zeta\\=&\int_{\zeta\in\mathbb{S}^1,|\xi-\zeta|<2}\frac{\mathrm{d}\sigma_\zeta}{(3-2\xi\cdot\zeta+|\xi|^2)^{1/2}}\simeq\int_{a(\xi)}^1\frac{\mathrm{d}a}{(3-|\xi|^2+2|\xi|a)^{1/2}(1-a^2)^{1/2}}\\\sim&\int_{a(\xi)}^1\frac{\mathrm{d}\alpha}{(a-a(\xi))^{1/2}(1-a^2)^{1/2}}\simeq 1,\end{aligned}$$

其中 $a(\xi)=-\frac{3-|\xi|^2}{2|\xi|}$。从三线形式 $T(f,g,h)$ 的 L^2 估计 (2.8.26)，得 Stein 算子 Sf 的 L^6 估计

$$\|Sf\|_{L^6(\mathbb{R}^2)}^3=\|T(f\cdot f,f)\|_{L^2}\simeq A^{1/2}\|f\|_{L^2(\mathbb{S}^1)}^3.$$

对于 $n=2$ 我们也能重复试用双线性的讨论。如前，对 $B(f,g)=Sf\cdot Sg$, 我们有

$$|\hat{B}(f,g)(\xi)|^2\leq\hat{B}(1,1)(\xi)\hat{B}(|f|^2,|g|^2)(\xi)$$

关于 ξ 积分，应用 引理 2.8.3 去估算 $B(1,1)$,

$$\|B[f,g]\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2\lesssim\int\int\frac{\delta(1-|\xi-\eta|)\delta(1-|\eta|)}{|\xi|(4-|\xi|^2)^{1/2}}|f(\xi-\eta)|^2|g(\eta)|^2\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\xi$$

作变量变换, $\xi\to\zeta=\xi-\eta$, 注意到当 $|\eta|=|\zeta|=1$ 时, 我们有

$$|\xi|=|\eta+\zeta|\simeq(1+\eta\cdot\zeta)^{1/2},$$

$$(4-|\xi|^2)^{1/2}=(4-|\eta+\zeta|^2)^{1/2}\simeq(1-\eta\cdot\zeta)^{1/2}.$$

因此，

$$\|B(f,g)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2\lesssim\int\int_{\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1}\frac{|f(\zeta)|^2|g(\eta)|^2}{(1-(\eta\cdot\zeta)^2)^{1/2}}\mathrm{d}\zeta_\eta\mathrm{d}S_\zeta \tag{2.8.28}$$

这是一个有意思的公式，如果 f 和 g 的支集在 $\mathbb{S}^1$ 上是投影不交的, 即不包含相同方向的点, 则量 $1-(\eta\cdot\zeta)^2$ 有正的下界，在这种情形我们得到了一个双线性限制估计

$$\|B(f,g)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}\lesssim\|f\|_{L^2(\mathbb{S}^1)}\|g\|_{L^2(\mathbb{S}^1)}.$$

我们也能考虑另外的双线性形式，有一个球面结构并在分母中的奇性可以消去，例如，取 $Q(f,g)=\partial_1Sf\partial_2Sg-\partial_2Sf\partial_1Sg$, 则用 Fourier 变换和与前相同的讨论过程，得到:

$$\begin{aligned}\|Q(f,g)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 &\lesssim \int\int_{\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1}\frac{|\eta_1\zeta_2-\eta_2\zeta_1|^2}{(1-(\eta\cdot\zeta))^{1/2}}|f(\zeta)|^2|g(\eta)|^2\mathrm{d}S_\eta\mathrm{d}S_\zeta\\ &\lesssim \|f\|_{L^2(\mathbb{S}^1)}^2\|g\|_{L^2(\mathbb{S}^1)}^2,\end{aligned}$$

这是由于有恒等式 $|\eta_1\zeta_2-\eta_2\zeta_1|^2=1-(\eta\cdot\zeta)^2\leq 1$。希望能推广这种类型的双线性估计到高维, 起码可以寻找一些简单但有意义的例子能帮助我们形成一些猜测，在此不准备赘述了。

第三章　线性波动方程

在本章第 1、2 节中，我们给出线性波动方程 Cauchy 问题的解，但重点是处理最重要的三个空间变量的情形。我们导出一个由初值的球面平均表示的经典公式，通过它可以了解解的依赖区域和衰减性质，这两个性质在我们将考虑的大多数非线性问题中扮演着重要的角色。我们也回顾解的 Fourier 积分表示，以及弱解的概念。在第三节中，将给出标准线性波动方程及其扰动方程的基本能量估计。然后，应用这些估计在下面的一节中证明线性波动方程的 Cauchy 问题在 L^2 型 Sobolev 空间框架下解的存在、唯一性。第五节我们给出解的逐点有界性估计。第六节我们将介绍解的 Strichartz 估计。第七节我们将介绍 Foschi 和 Klainerman 关于波动方程的双线性估计成立的充要条件。最后一节我们介绍波 Sobolev 空间以及一些相关的估计。

§3.1　线性波动方程的经典解

在本书中，我们将考虑线性 Cauchy 问题

$$\begin{cases} \Box u(t,x)=0, \\ u(0,x)=f(x),\ \partial_t u(0,x)=g(x) \end{cases} \tag{3.1.1}$$

的各种扰动。这里 $(t,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n=\mathbb{R}^{1+n}$, $\Box=\partial_t^2-\sum_{j=1}^n\partial_j^2=\partial_t^2-\Delta_x$, $\partial_j=\frac{\partial}{\partial x_j}$, $\partial_t=\frac{\partial}{\partial t}$。为方便，有时记 $t=x_0$, $\partial_t=\partial_{x_0}=\partial_0$，我们先考虑 (3.1.1)$n=3$ 的情形是由于三维情形有物理意义。另外，我们知道要研究非线性问题，理解线性问题的解是重要的，而三维情形往往是高维问题的一个参照物。

我们将看到求解 (3.1.1) 的最快方法是 Fourier 变换方法。然而，对于非线性问题来说，许多情形对基本解的一个直接的表示更有用。

我们首先注意到对于一维弦振动方程的 Cauchy 问题解的达朗贝尔公式

$$u(t,x)=\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}g(s)\mathrm{d}s,$$

可以写为

$$u(t,x)=\frac{\partial}{\partial t}(tA_tf)+tA_tg,$$

其中 $A_th(x)=\frac{1}{2t}\int_{x-t}^{x+t}h(\xi)\mathrm{d}\xi$ 是函数 h 在区间 $[x-t,x+t]$ 上的积分平均。又注意到对于三个空间变量的波动方程，如果初值有球面对称性，我们可以寻求只依赖于 t,r 的解 $u=u(t,r)$，其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$。这时的方程可以写为

$$u_{tt}=u_{rr}+\frac{2}{r}u_r.$$

如果令 $v=ru$, 则它与一维弦振动方程的形式完全相同: $v_{tt}-v_{rr}=0$。对于一般的情形，方程表达形式虽然要复杂得多，但却给我们一个启示，是否可以通过球面平均的方法来达到这样的降维目的。也即引入一个关于 $u(t,x)$ 在时间 t, 具有球心 x、半经 r 的球面上的平均值函数 $(A_r u)(t,x)$, 我们常常记为 $A_r u(t,x)$。建立 $A_r u(t,x)$ 所满足的比较容易求解的偏微分方程与相应的 Cauchy 问题，然后通过 $A_r u(t,x)$ 得到 u 的表达式。为此，我们考虑定义在 $\mathbb{R}^3$ 中的函数 $h(x)$ 的球面平均函数：

$$(A_r h)(x)=\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{S}^2}h(x+ry)\mathrm{d}\sigma(y)=\frac{1}{4\pi r^2}\int_{|x-y|=r}h(y)\mathrm{d}\sigma(y), \tag{3.1.2}$$

其中 $\mathrm{d}\sigma(y)$ 表示单位球面 $\mathbb{S}^2\subset\mathbb{R}^3$ 上的 Lebesgue 测度, 其面积为 4π。由散度定理,

$$\begin{aligned}
\partial_r(A_r h)(x) &= \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{S}^2}\sum_{k=1}^{3}y_k\partial_k h(x+ry)\mathrm{d}\sigma(y)\\
&= \frac{1}{4\pi}\int_{|y|<1}r\Delta h(x+ry)\mathrm{d}y\\
&= \frac{1}{4\pi r^2}\int_{|y|<r}\Delta h(x+y)\mathrm{d}y\\
&= \frac{1}{4\pi r^2}\Delta_x\int_{|x-y|<r}h(y)\mathrm{d}y\\
&= r^{-2}\Delta_x\int_0^r \mathrm{d}\rho\frac{1}{4\pi}\int_{|y-x|=\rho}h(y)\mathrm{d}\sigma(y)\\
&= r^{-2}\Delta_x\int_0^r\rho^2 A_\rho h(x)\mathrm{d}\rho.
\end{aligned}$$

这样

$$\begin{aligned}
\partial_r(A_r h(x)) &= r^{-2}\Delta_x\int_0^r\rho^2 A_\rho h(x)\mathrm{d}\rho.\\
\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial}{\partial r}A_r h(x)) &= \Delta_x r^2 A_r h(x),
\end{aligned}$$

等价于

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)A_r h(x)=\Delta_x A_r h(x). \tag{3.1.3}$$

这就是所谓的 Darboux 方程。

注意到 $r\to A_r h(x)$ 是偶函数, 其初值满足

$$A_0 h(x)=h(x),\ \partial_r A_0 h(x)=0. \tag{3.1.4}$$

下面设 $u(t,x)\in C^2$, 且在 $\mathbb{R}^{1+3}$ 中是 (3.1.1) 的解。

令

$$U(r;t,x)=(A_r u(t,\cdot))(x)=\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{S}^2}u(t,x+ry)\mathrm{d}\sigma(y).$$

则由 (3.1.3),

$$\Delta_x U = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right) U = r^{-1}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rU).$$

再由于 $\partial_t^2 u(t,x) = \Delta_x u(t,x)$,

$$\Delta_x U = \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{S}^2} \Delta_x u(t,x+ry)\mathrm{d}\sigma(y) = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_{\mathbb{S}^2} u(t,x+ry)\mathrm{d}\sigma(y) = \frac{\partial^2}{\partial t^2}U.$$

这样,$v(t,r) = rU(r;t,x)$ 是一维弦振动方程

$$\begin{cases} \partial_t^2 v = \partial_r^2 v, \\ v(0,x) = rA_r f(x),\ \partial_t v(0,x) = rA_r g(x) \end{cases}$$

的解:

$$v = \frac{1}{2}[(r+t)A_{r+t}f(x) + (r-t)A_{r-t}f(x)] + \frac{1}{2}\int_{r-t}^{r+t} \rho A_\rho g(x)\mathrm{d}\rho.$$

由于 $A_r f$ 和 $A_r g$ 是 r 的偶函数, 且 $v = rU$, 因此

$$U = \frac{1}{2r}[(t+r)A_{t+r}f(x) - (t-r)A_{t-r}f(x)] + \frac{1}{2r}\int_{t-r}^{t+r} \rho A_\rho g(x)\mathrm{d}\rho.$$

但注意到 $u(t,x) = U(0;t,x)$, 我们令 $r \to 0$, 最后得到

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \partial_t(tA_t f(x)) + tA_t g(x) \\ &= \frac{1}{4\pi t^2}\int_{|x-y|=t} [tg(y) + f(y) - \langle \nabla_y f(y), x-y\rangle]\mathrm{d}\sigma(y). \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

这说明 $\mathbb{R}_+^{1+3} = \{(t,x) \in \mathbb{R}^{1+3} : t \geq 0\}$ 中的 Cauchy 问题 (3.1.1) 的 C^2 解必须是由公式 (3.1.5) 给出的。因此, 必是唯一的。反过来, 如果 $f \in C^3(\mathbb{R}^3), g \in C^2(\mathbb{R}^3)$, 则由 (3.1.5) 给出的 u 必是 Cauchy 问题 (3.1.1) 的解。

注意到对于给定的 $(t,x) \in \mathbb{R}_+^{1+3}$, $u(t,x)$ 只是依赖于 g 和 f(和导数) 在以 x 中心 t 为半径的球面上的值, 这就是说强惠更斯原理成立。

引理 3.1.1 如果 $k \geq 1, \phi \in C^{k+1}(\mathbb{R})$, 则

$$\partial_r^2 (r^{-1}\partial_r)^{k-1}[r^{2k-1}\phi(r)] = (r^{-1}\partial_r)^k [r^{2k}\phi'(r)].$$

证明 直接验证上式对 $\phi(r) = r^m$ 成立。因此, 当 ϕ 是多项式时成立。当 ϕ 及其 $\leq k+1$ 阶导数在 r_0 处为 0 时, 上式两边在 r_0 处均为 0。但由 Taylor 定理, 对任何 r_0 记 $\phi = P + R$, P 表示在 r_0 处 $k+1$ 阶为 0 的多项式, 这样, 上式对一般的情形也成立。

这里我们用了 Euler-Poisson-Darboux 方程。

$$\left(\partial_r^2 + \frac{n-1}{r}\partial_r\right) A_r u = \partial_t^2 A_r u.$$

对于 $n>3$ 时的奇数维情形, 这样的构造也可以用来导出 n 维空间依赖于球面平均的 (3.1.1) 的解: n 维的球面平均 $A_r h(x)=\frac{1}{w_{n-1}}\int_{\mathbb{S}^{n-1}}h(x+ry)\mathrm{d}\sigma(y)$, w_{n-1} 表示 $\mathbb{S}^{n-1}\subset\mathbb{R}^n$ 的面积元。如果 $n=2k+1$, 令

$$v(A_r u(t,x))=\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)^{k-1}(r^{2k-1}A_r u(t,x)).$$

由 引理 3.1.1 可得

$$\partial_r^2 v(A_r u)=v[(\partial_r^2+\frac{n-1}{r}\partial_r)A_r u]=v[\partial_t^2 A_r u]=\partial_t^2 v(A_r u),$$

从而立即有 v 满足

$$\begin{cases}\partial_t^2 v=\partial_r^2 v,\\ v(0,r)=(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r})^{k-1}(r^{2k-1}A_r f(x))\triangleq\phi(r),\\ \partial_t v(0,r)=(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r})^{k-1}(r^{2k-1}A_r g(x))\triangleq\psi(r).\end{cases}$$

引理 3.1.2 *存在常数* c_j, *使得* $(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r})^{k-1}(r^{2k-1}\phi(r))=\sum_{j=0}^{k-1}c_j r^{j+1}\frac{\partial^j}{\partial r^j}\phi(r)$, *其中* $c_0=1\cdot3\cdot5\cdots(2k-1)=1\cdot3\cdot5\cdots(n-2)$。

证明 事实上, 在 $(r^{-1}\partial_r)^{k-1}[r^{2k-1}\phi(r)]$ 中, 关于 r 在分子中是 $2k-1$ 次的, 分母中是 $k-1$ 次的, 导数为 $k-1$ 阶。由莱布尼兹公式, j 阶导数作用于 ϕ , $k-1-j$ 阶导数作用于 r 的。这样, 剩下的 r 的次数为 $(2k-1)-(k-1)-(k-1-j)=j+1$。

因此, 存在 c_j 使得

$$\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)^{k-1}(r^{2k-1}\phi(r))=\sum_{j=0}^{k-1}c_j r^{j+1}\phi^{(j)}(r),$$

其中

$$c_0 r=(r^{-1}\partial_r)^{k-1}r^{2k-1}=1\cdot3\cdots(2k-1)r.$$

如同前面一样, 注意到球面平均是 r 的偶函数, 我们求解上面的一维问题得

$$v(r,t)=\frac{1}{2}[\phi(r+t)-\phi(t-r)]+\frac{1}{2}\int_{t-r}^{r+t}\psi(s)\mathrm{d}s.$$

因此, 用对 $n=3$ 同样的讨论及 引理 3.1.2, 得

$$u(t,x)=\lim_{r\to0}A_r u(t,x)=\lim_{r\to0}\frac{1}{c_0 r}v(r,t)=\frac{1}{c_0}\partial_r\phi|_{r=t}+\frac{1}{c_0}\psi(t).$$

这样, 对奇数的 n

$$u(t,x)=\frac{1}{1\cdot3\cdot5\cdots(n-2)}\left[\frac{\partial}{\partial t}(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t})^{\frac{n-3}{2}}(t^{n-2}A_t f(x))+(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t})^{\frac{n-3}{2}}(t^{n-2}A_t g(x))\right].\tag{3.1.6}$$

这复杂的公式说明惠更斯定理的强形式在任意奇数维中成立。

使用 Hadamard 的降维方法，对偶数维 n 的情形可得精确公式。思想是: 如果 u 是 $\mathbb{R}^{1+n}$ 中波动方程的解，则也正是 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{n+1}$ 中波动方程与 x_{n+1} 变量无关的一个解。因此，如果 n 是偶数，我们使用 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{n+1}$ 中的求解公式得到解 $u(t,x)$ 的表达式，然后，积掉多余的变量。这样，可以导出对 n 是偶数时的下述公式:

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \frac{2}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(n-1)w_n}\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-2}{2}} t^{n-1}\int_{|y|<1}\frac{f(x+ty)}{\sqrt{1-|y|^2}}\mathrm{d}y\right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-2}{2}} t^{n-1}\int_{|y|<1}\frac{g(x+ty)}{\sqrt{1-|y|^2}}\mathrm{d}y\right]. \end{aligned} \tag{3.1.7}$$

事实上，用 (3.1.6) 得

$$\begin{aligned} &u(t,x) \\ =& \frac{2}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(n-1)w_{n+1}}\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-2}{2}} t^{n-1}\int_{|y|^2+y_{n+1}^2=1} f(x+ty)\mathrm{d}\sigma(y,y_{n+1})\right. \\ &\left. + \left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-2}{2}} t^{n-1}\int_{|y|^2+y_{n+1}^2=1} g(x+ty)\mathrm{d}\sigma(y,y_{n+1})\right]. \end{aligned}$$

如果我们把上、下半球面投影到 $|y|<1$ 上，在每一个半球面上

$$\mathrm{d}y = \sqrt{1-|y|^2}\mathrm{d}\sigma(y,y_{n+1}),$$

即可得到 (3.1.7) (上、下半球面由 $y_{n+1}=\pm\phi(y)=\pm\sqrt{1-|y|^2}$, $|y|<1$ 给出。则 $\mathrm{d}\sigma(y,y_{n+1})=\sqrt{1+|\nabla\phi|^2}\mathrm{d}y=\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1-|y|^2}}$。一般，如果 $S\subset\mathbb{R}^{n+1}$ 是形如 $S=\{(x,h(x))\}$ 的一个图像，则 $\mathrm{d}\sigma=\sqrt{1+|\nabla h(x)|^2}\mathrm{d}x$)。

(3.1.7) 意味着对偶数维情形仅有弱惠更斯原理成立。具体地，这里 $u(t,x)$ 依赖于中心在 x、半径为 t 的实心球的内部。

定理 3.1.1 *如果 $k=2,3\cdots$, $f\in C^{[\frac{n}{2}]+k}(\mathbb{R}^n), g\in C^{[\frac{n}{2}]+k-1}(\mathbb{R}^n)$, 则 Cauchy 问题 (3.1.1) 有唯一解 $u\in C^k(\mathbb{R}_+^{1+n})$。如果 f 和 g 的支集在 $\{x:|x|<R\}$ 中，若 $n\geq 3$ 是奇数，且 $|t-|x||>R$ ，则 $u(t,x)=0$。由微积分基本定理可得 $u(t,x)=O((1+t)^{-\frac{n-1}{2}})$; 若 n 是偶数，我们只能说仅当 $|x|>t+R$ 时，$u(t,x)=0$。这样，我们仅能得到*

$$u(t,x)=O((1+t)^{-\frac{n-1}{2}}(1+|t-|x||)^{-\frac{n-1}{2}}).$$

注 3.1.1 *从定理 3.1.1 可以看出齐次波动方程的解有 $[\frac{n}{2}]$ 阶导数的损失。这是由于基本解的奇性使得较弱的奇性沿前向光锥传播、干扰产生了更强的奇性。但我们将看到在某种平均意义下，如在 L^2 型 Sobolev 空间框架下，解的可导性就没有损失，这是由于能量的守恒所致。*

对于紧初值情形，除了 u 的衰减性外的其他性质容易从 (3.1.6),(3.1.7) 得到。关于衰减性，对于奇数维 n 证明并不难，而对于偶数维我们或可以直接从 (3.1.7) 得到，或从 (3.1.6) 通过降维方法得到。注意到对偶数维 n，虽然仅有弱惠更斯原理成立，衰减性

结果却是对它的一个补充。对于紧支集初值，当点越离开光锥 $\{(t,x): t=|x|\}$, u 衰减就越快，这反过来说明衰减性叙述是最佳的。它在非线性波动方程的整体或长时间存在性结果中扮演了重复的角色，我们将用另外一方法证明衰减估计。

非齐次波动方程 我们考虑在 $t=0$ 时有零初值的非齐次波动方程。

$$\begin{cases} \Box w(t,x) = F(t,x),\ t>0, \\ w(0,x) = \partial_t w(0,x) = 0. \end{cases} \tag{3.1.8}$$

如果 $F \in C^{1+[\frac{n}{2}]}$ ，我们可从 (3.1.1) 的解和 Duhamel 原理得到 (3.1.8) 的一个 C^2 解。具体地说，对于给定 $s>0, v(s;t,x)$ 是 Cauchy 问题

$$\begin{cases} (\partial_t^2 - \Delta_x)v = 0, & t>0, \\ v(s;0,x) = 0, & \partial_t v(s;0,x) = F(s,x) \end{cases}$$

的解, 则 (3.1.8) 的解是由

$$w(t,x) = \int_0^t v(s;t-s,x)\mathrm{d}s \tag{3.1.9}$$

给出的。

注 3.1.2 Duhamel 原理可以作如下的物理理解：如果我们将外力 $f(x,\tau)$ 看成是 τ 时刻外力所产生的作用时间极短的脉冲力，这个力等效于 $f(x,t)\delta(t-\tau)$。由于这样的力作用时间的瞬时性，当它作用时质点的位置可以看成是不动的。而这时刻物质运动的速度的增加量为 $f(x,\tau)$。这样，在时段 $[0,t]$ 中外力对运动所产生的总效果应是所有这样的脉冲力作用的总和。

为证实 Duhamel 原理, 首先注意到, 如果 w 由 (3.1.9) 给出, 则由定理 3.1.1, $w \in C^2$。显然, $w(0,x)=0$, 由于

$$\partial_t w(t,x) = v(t;0,x) + \int_0^t \partial_t v(s;t-s,x)\mathrm{d}s = \int_0^t \partial_t v(s;t-s,x)\mathrm{d}s,$$

(3.1.8) 中的另一初始条件也满足。最后, 我们说 $\Box w = F$。这是由于

$$\begin{aligned} \partial_t^2 w(t,x) - \Delta_x w(t,x) &= \partial_t v(t;0,x) + \int_0^t (\partial_t^2 - \Delta_x) v(s;t-s,x)\mathrm{d}s \\ &= \partial_t v(t;0,x) = F(t,x). \end{aligned}$$

(3.1.9) 意味着对非齐次波动方程惠更斯原理的一种形式也成立。

对于偶数维的空间, $w(t,x)$ 依赖于 F 在过 (t,x) 的实后向光锥 $\Lambda_{t,x}^-$ 中的值, 其中

$$\Lambda_{t,x}^- = \{(s,y): 0 \le s < t, |x-y| \le t-s\}.$$

而在奇数维情形, 一个更强的方式成立。u 仅依赖于在后向光锥边界 $\Gamma_{t,x}^-$ 上的值, 其中

$$\Gamma_{t,x}^- = \partial\Lambda_{t,x}^- = \{(s,y): 0 \le s < t, |x-y| = t-s\}.$$

当 $n=3$ 时，我们可以得到 (3.1.8) 的解的一个简单的公式：

$$\begin{aligned} w(t,x) &= \frac{1}{4\pi}\int_0^t\int_{\mathbb{S}^2}(t-s)F(s,x-(t-s)y)\mathrm{d}\sigma(y)\mathrm{d}s \\ &= \frac{1}{4\pi}\int_0^t\frac{1}{t-s}\int_{|y|=t-s}F(s,x-y)\mathrm{d}\sigma(y)\mathrm{d}s \\ &= \frac{1}{4\pi}\int_{|y|<t}F(t-|y|,x-y)\frac{\mathrm{d}y}{|y|} \\ &= \frac{1}{4\pi}\int_{\Gamma^-_{t,x}}F(s,y)\frac{\mathrm{d}\sigma(s,y)}{|(t-s,x-y)|}, \end{aligned} \tag{3.1.10}$$

其中 $\mathrm{d}\sigma$ 表示通过 $\mathbb{R}^{1+3}$ 的原点的前向光锥上的 Lebesgue 测度。

(3.1.10) 意味着比较定理在 $n=3$ 时成立。即如果 w_1 和 w_2 分别是在 $t=0$ 有零初值的方程 $\Box w_j=F_j$ 的解，若 $|F_1|\le F_2$，则 $|w_1|\le w_2$。

注 3.1.3 这个比较定理当 $n=2$ 时也成立，但当 $n>3$ 时就没有这样的比较定理。(3.1.10) 也说明 $n=3$ 时，$F\longmapsto w$ 是 $L^\infty\to L^\infty$ 的映照 (关于时间局部地)。这对高维情形也是不对的，这是由于随着 n 的增加，Cauchy 问题的解的奇性也随之增加。

如果 $F(t,x)$ 是球面对称的，则 w 也是。如果记 $|x|=r, w(t,r)=w(t,x)$，就能导出 $n=3$ 时在球面对称假设下的一个简单的公式，即

$$rw(t,r)=1/2\int_0^t\int_{|r-(t-s)|}^{r+t-s}F(s,\rho)\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}s. \tag{3.1.11}$$

为证之，只要用 (3.1.10) 中的第二个等式以及如下事实：对于球面对称函数 h，我们有

$$\int_{|x-y|=t}h(|y|)\mathrm{d}\sigma(y)=\frac{2\pi t}{r}\int_{|r-t|}^{r+t}h(\rho)\rho\mathrm{d}\rho,\ r=|x|.$$

记 $y=x+t\omega$, $\omega=(\sin\theta\cos\phi,\sin\theta\sin\phi,\cos\theta)$, $0\le\phi\le 2\pi$, $0<\theta<\pi$，在球面上，$\mathrm{d}\sigma=\sin\theta\mathrm{d}\phi\mathrm{d}\theta$。不妨设 $x=(0,0,r)$，上面等式的左边等于

$$\begin{aligned} t^2\int_{S^2}h(|x+t\omega|)\mathrm{d}\sigma(\omega) &= 2\pi t^2\int_0^\pi h(\sqrt{t^2+r^2+2rt\cos\theta})\sin\theta\mathrm{d}\theta \\ &= 2\pi t^2\int_{-1}^1 h(\sqrt{t^2+r^2+2rt\lambda})\mathrm{d}\lambda \\ &= \frac{2\pi t}{r}\int_{|r-t|}^{r+t}h(\rho)\rho\mathrm{d}\rho. \end{aligned}$$

最后一步是由于 $\rho\mathrm{d}\rho=rt\mathrm{d}\lambda, \rho=\sqrt{t^2+r^2+2rt\lambda}$。

注 3.1.4 在研究 $\mathbb{R}^{1+3}$ 中的半线性波动方程的时候，我们将运用比较定理把问题转化为在球面对称情形下来证明，这里我们可以利用简单的公式 (3.1.11)，一个相关的公式在其他情形也成立，但三维时是最直接的。

§3.2　线性波动方程的弱解

考虑

$$\begin{cases} \Box u(t,x) = F(t,x), & t > 0, \\ u(0,x) = f(x), & \partial_t u(0,x) = g(x). \end{cases} \tag{3.2.1}$$

如果 $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), F \in C^2(\mathbb{R}; \mathcal{S}(\mathbb{R}^n))$。我们可以用 Fourier 变换式写出求解公式。

$$\begin{aligned} u(t,x) &= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{ix\cdot\xi} \cos t|\xi| \hat{f}(\xi) \mathrm{d}\xi + (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{ix\cdot\xi} \frac{\sin t|\xi|}{|\xi|} \hat{g}(\xi) \mathrm{d}\xi \\ &\quad + (2\pi)^{-n} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{ix\xi} \frac{\sin(t-s)|\xi|}{|\xi|} \hat{F}(s,\xi) \mathrm{d}\xi \mathrm{d}s, \end{aligned} \tag{3.2.2}$$

其中 $\hat{F}(x,\xi)$ 记 $x \longmapsto F(s,x)$ 的 Fourier 变换, 这只要用 (2.1.5) 和 Duhamel 原理即可。

以上我们处理的是如 (3.2.1) 的方程的经典解，即解 $u \in C^2$。更广泛地，我们可以讨论 (3.2.1) 的弱解, 或广义解。为定义之, 我们只要注意到如果 $u \in C^2$, 且 (3.2.1) 成立, 则对于 $\psi(t,x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{1+n})$, 由分步积分

$$\begin{aligned} &\int\int_{t>0} \psi F \mathrm{d}t\mathrm{d}x = \int\int_{t>0} \psi \Box u \mathrm{d}t\mathrm{d}x = \int\int_{t>0} (\psi \partial_t^2 u - \Delta_x \psi u) \mathrm{d}t\mathrm{d}x \\ = &-\int\int_{t>0} \partial_t\psi \partial_t u \mathrm{d}t\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^n} \psi(0,x)\partial_t u(0,x)\mathrm{d}x - \int\int_{t>0} \Delta_x \psi u \mathrm{d}t\mathrm{d}x \\ = &\int\int_{t>0} \partial_t^2 \psi u \mathrm{d}t\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^n} \partial_t \psi(0,x) u(0,x) \mathrm{d}x \\ &- \int_{\mathbb{R}^n} \psi(0,x)\partial_t u(0,x)\mathrm{d}x - \int\int_{t>0} \Delta_x \psi u \mathrm{d}t\mathrm{d}x \\ = &\int\int_{t>0} (\partial_t^2 - \Delta_x)\psi u \mathrm{d}t\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^n} \psi(0,x)\partial_t u(0,x)\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^n} \partial_t\psi(0,x)u(0,x)\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned} \int\int_{t>0} \psi F \mathrm{d}t\mathrm{d}x &= \int\int_{t>0} \Box\psi u \mathrm{d}t\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^n} \psi(0,x) g(x) \mathrm{d}x \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^n} \partial_t \psi(0,x) f(x) \mathrm{d}x, \ \forall \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{1+n}). \end{aligned} \tag{3.2.3}$$

设 $\mathcal{D}'$ 是 C_0^∞ 的对偶, 则对于 $f, g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$。如果 $u, F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{1+n})$, 这个方程完全有意义。这样, 我们可以利用这一等式来定义弱解: 如果 (3.2.3) 对于任意的 $\psi(t,x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{1+n})$ 成立, 则称 u 是 (3.2.1) 的一个弱解 (或分布解)。

对于 $t \in \mathbb{R}$, 考虑映照: $t \mapsto u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, 称 u 在 t_0 是连续的, 当且仅当对于每个 $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\langle u(t), \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} u(t)\phi \mathrm{d}x$ 在 t_0 是连续的, 称 u 在 t_0 是可微的, 如果存在一个 $v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, 使得对每个 $\phi \in C_0^\infty$,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \langle u(t), \phi \rangle|_{t=t_0} = \langle v, \phi \rangle,$$

并且记 $u'(t) = v$。同理可以定义其高阶导数。如果 $u, u', \cdots, u^{(k)}$ 在 $\mathbb{R}$ 上存在且连续，记 $u \in C^k(\mathbb{R}, \mathcal{D}')$。对于 $u \in C(\mathbb{R}, \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n))$，我们可以由

$$\langle u, \psi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \langle u(t), \psi(t, \cdot) \rangle \mathrm{d}t, \quad \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{1+n})$$

定义一个 $\mathbb{R}^{1+n}$ 上的分布，称之为时间依赖分布。

定理 3.2.1 *对于以 $f, g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ 为初值的齐次波动方程 $\Box u = 0$ 的 Cauchy 问题，存在唯一的分布解 $u \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n))$。*

事实上，我们可以将这样的解表示成

$$u(t) = E'(t) * f + E(t) * g,$$

其中 $E(t) \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n))$, $E(0) = E''(0) = 0$, $E'(0) = \delta$。

我们称 $E_+ = E|_{t \geq 0}$ 为波算子 $\Box$ 的一个（前向）基本解。这样，由

$$\langle E_+, \psi \rangle = \int_0^\infty \langle E(t), \psi(t, \cdot) \rangle \mathrm{d}t, \quad \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{1+n})$$

知 $E_+ \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{1+n})$。

不难知道（见 [21]）波算子 $\Box$ 的基本解

$$E_+ = \frac{1}{2}\pi^{\frac{1-n}{2}} \chi_+^{\frac{1-n}{2}}(t^2 - |x|^2),$$

其中 $\chi_+^a = s^a/\Gamma(a+1)$, $s > 0$, $\chi_+^a(s) = 0, s \leq 0, \Re a > -1$. 对于所有的 $a \in \mathbb{C}$，有 $\mathrm{d}\chi_+^a/\mathrm{d}s = \chi_+^{a-1}$。这样，$\chi_+^{-k}(s) = \delta^{(k-1)}(s), k = 1.2, \cdots$。

从基本解的表达式可以看出，当 $n > 1$ 时，定理 3.1.1 中所述的 Cauchy 问题的解，当 $t > 0$ 时相对于 $t = 0$ 的初始条件有 $n/2$ 阶的导数损失是可以理解的。进一步，我们可得

定理 3.2.2 *对于以 $f, g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ 为初值的在带形区域 $S_T = (0, T) \times \mathbb{R}^n$ 中的非齐次波动方程 $\Box u = F$ 的 Cauchy 问题的分布解 $u \in C^1([0, T]; \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n))$ 是唯一的，其中 $T > 0, F \in \mathcal{D}'(S_T)$。*

我们也可以讨论变系数方程的弱解。设 $T > 0, a(t, x), b^j(t, x), b^j(t, x)$ 和 $g^{jk}(t, x)$ 是实的且在 $C^2([0, T) \times \mathbb{R}^n)$ 中，其中 $0 \leq j, k \leq n$ 且 g^{jk} 是对称的，设 $\partial_0 = \partial_t$，

$$Lu = \sum_{j,k=0}^n g^{jk}(t, x)\partial_j \partial_k u + \sum_{j=0}^n b^j(t, x)\partial_j u + a(t, x)u. \tag{3.2.4}$$

设 $u \in C^2((0, T) \times \mathbb{R}^n)$ 是如下方程的解：

$$\begin{cases} Lu = F, & 0 < t < T, \\ u(0, x) = f(x), & \partial_0 u(0, x) = g(x). \end{cases} \tag{3.2.5}$$

我们可以通过分步积分，对 $\psi \in C_0^\infty((-\infty, T) \times \mathbb{R}^n)$ 成立：

$$\iint_{0<t<T} \psi F \mathrm{d}t\mathrm{d}x$$

$$= \int\int_{0<t<T} L^*\psi u\mathrm{d}t\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^n} \psi(0,x)g^{00}(0,x)g(x)\mathrm{d}x$$
$$+ \int_{\mathbb{R}^n} [(\partial_0(g^{00}\psi))(0,x) - (b^0\psi)(0,x) + 2\sum_{j=1}^{n}(\partial_j(\psi g^{j0}))(0,x)]f(x)\mathrm{d}x$$

其中 $L^* = \sum \partial_j\partial_k g^{jk} - \sum \partial_j b^j + a$ 是 L 的共轭算子。

这里我们也能说，如果 f, g, u 和 F 是如上的分布，且上面的公式对所有的 $\psi \in C_0^\infty((-\infty, T) \times \mathbb{R}^n)$ 成立，则 u 是 (3.1.7) 的弱解。当然我们也能定义系数是分布时问题的弱解.

以后我们常常遇到：u_m 是以 $u_m(0,x), \partial_0 u_m(0,x)$ 为初值、$F = F_m$ 为右端的 Cauchy 问题 (3.2.1) 的经典解。如果在 $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{1+n})$ 意义下，$u_m \to u$。则欲说明分布的极限是同样类型方程的解，我们得验证 F_m 在 $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{1+n})$ 中收敛于 F，初值 $u_m(0,x), \partial_0 u_m(0,x)$ 在 $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ 的意义下收敛于 f, g 。如果这些成立，我们就说 u 是 (3.2.1) 的一个弱解。

同样的考虑可应用到变系数问题，这里 g^{jk} 和 b^j 也可以依赖于 m，这时我们需要验证系数也相应地收敛。

如果允许弱解，就能用这样的讨论把定理 3.1.1 拓延到 $k = 0, 1$ 的情形。方程 (3.1.1) 满足 $(f, g) \in C^{[(n-3)/2]+k+1} \times C^{[(n-3)/2]+k}$ 的弱解，仍然由 (3.1.6) 和 (3.1.7) 得出。

对于 $F \in C(\mathbb{R}_+^{1+3})$，方程 $\Box w = F$ 满足零初值条件的弱解可由 (3.1.10) 给出。如果 F 是球对称的，则 (3.1.11) 仍然成立。

§3.3 能量不等式

达朗贝尔 (算子) 的一个基本的估计来自于恒等式

$$\partial_0 u \Box u = \frac{1}{2}\partial_0 |u'|^2 - \sum_{j=1}^{n} \partial_j(\partial_0 u \partial_j u) = \mathrm{div}(\partial_0 u g_0 u' - \frac{1}{2} g_0(u', u')\mathbf{1}) \tag{3.3.1}$$

的应用，其中 $u' = \partial u = (\partial_0 u, \cdots \partial_n u), \mathbf{1} = (1, 0, \cdots 0)$ 和 $g_0 = g_0^{jk} = \mathrm{diag}(1, -1, \cdots, -1)$ 是 Lorentz 矩阵。(3.3.1) 的第二式在处理变系数时是有用的。

如果 $u \in C_0^2$，我们能关于空间变量积分得到

$$\begin{aligned}
\partial_0 \|u'(t,\cdot)\|_{L^2}^2 &= \int \partial_0 |u'|^2 \mathrm{d}x - 2\sum_{j=1}^{n} \int \partial_j(\partial_0 u \partial_j u)\mathrm{d}x \\
&= \int \mathrm{div}(|u'|^2, -2\partial_0 u \partial_x u)\mathrm{d}x \\
&= 2\int \partial_0 u \Box u \mathrm{d}x \le 2\|u'(t,\cdot)\|_{L^2} \|\Box u(t,\cdot)\|_{L^2}.
\end{aligned}$$

但这意味着

$$\partial_0\|u'(t,\cdot)\|_{L^2} \le \|\Box u(t,\cdot)\|_{L^2}.$$

因此, 对于达朗贝尔, 我们得到能量不等式

$$\|u'(t,\cdot)\|_{L^2} \le \|u'(0,\cdot)\|_{L^2} + \int_0^t \|\Box u(s,\cdot)\|_{L^2}\mathrm{d}s. \tag{3.3.2}$$

如果 $\Box u$ 恒为 0, 这个不等式将由等式取代, 这意味着 u 有恒为常数的动能 $\frac{1}{2}\|u'(t,\cdot)\|^2_{L^2}$。这样, 如果 u 是齐次 Cauchy 问题 (3.1.1) 的解, 我们有

$$\int |u'(t,x)|^2\mathrm{d}x = \int |g(x)|^2\mathrm{d}x + \int |(\partial_x f)(x)|^2\mathrm{d}x.$$

估计 u 本身的范数并不是如此自然。

设 u 是 $\Box u = 0$, $u(0,x) = 0$, $\partial_t u(0,x) = g(x)$ 的解, 则由 Plancherel 定理和 (3.2.2)

$$\int |u(t,x)|^2\mathrm{d}x = (2\pi)^{-n}\int \left|\frac{\hat{g}(\xi)\sin(t|\xi|)}{|\xi|}\right|^2\mathrm{d}\xi.$$

据此, 我们看到, 方程 (3.1.1) 的解 u 的 L^2 范数如果由初值的 Sobolev 范数来估计, 其系数当 $t\to\infty$ 时会趋于无穷,

$$\|u(t,\cdot)\|_{L^2} \le \|f\|_{L^2} + (1+t^2)^{1/2}\|g\|_{H^{-1}}.$$

当然, 我们也能用 Plancherel 公式和对 u 的 Fourier 变换公式 (3.2.2) 证明 (3.3.2)。然而, 不像 Fourier 积分方法，能量方法在扰动和关于系数的更低的正则性要求下是稳定的。

为了看到这一点，我们将上面的方法用到充分接近于达朗贝尔的变系数算子上去。

命题 3.3.1 设 $u\in C^2([0,T]\times\mathbb{R}^n)$, 对大 $|x|$ 为 0, 且满足

$$\sum_{j,k=0}^n g^{jk}(t,x)\partial_j\partial_k u = F,\ 0\le t<T. \tag{3.3.3}$$

如果 $g_0^{jk} = \mathrm{diag}(1,-1,\cdot,-1)$ 是达朗贝尔的系数, 令 $r^{jk}(t,x) = g^{jk}(t,x) - g_0^{jk}$, 则如果

$$\sum |r^{jk}(t,x)| \le 1/2,\ 0\le t<T, \tag{3.3.4}$$

我们有

$$\|u'(t,\cdot)\|_{L^2} \le 2\left(\|u'(0,\cdot)\|_{L^2} + \int_0^t \|F(s,\cdot)\|_{L^2}\mathrm{d}s\right)\exp\left(\int_0^t 2\sum\|\partial_i g^{jk}(s,\cdot)\|_{L^\infty}\mathrm{d}s\right) \tag{3.3.5}$$

对 $0<t<T$ 成立。

证明 用 $\Box_g u$ 记 (3.3.3) 的左边, 则我们需要 (3.3.1) 的下面的变形

$$\partial_0 u \Box_g u = \operatorname{div}(\partial_0 u \sum g^{jk}\partial_k u - \frac{1}{2}\sum g^{jk}\partial_j u \partial_k u \mathbf{1}) - R,$$

其中

$$\begin{aligned} R &= \sum_{j,k=0}^{n} \partial_j g^{jk}\partial_k u \partial_0 u - 1/2 \sum_{j,k=0}^{n} \partial_0 g^{jk}\partial_j u \partial_k u \\ &= \frac{1}{2}\partial_0 g^{00}(\partial_0 u)^2 + \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=0}^{n} \partial_j g^{jk}\partial_j u \partial_0 u - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=0}^{n} \partial_0 g^{jk}\partial_j u \partial_k u. \end{aligned}$$

设 $e(u)$ 是与 $\Box_g$ 相联系的能量密度, 即散度的 0 分量

$$\begin{aligned} e(u) &= \sum g^{0k}\partial_0 u \partial_k u - 1/2 \sum g^{jk}\partial_j u \partial_k u \\ &= \frac{1}{2}|u'|^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} r^{0k}\partial_0 u \partial_k u - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=0}^{n} r^{jk}\partial_j u \partial_k u. \end{aligned}$$

这样, (3.3.4) 意味着对固定的 t 有

$$1/4|u'|^2 \le e(u) \le |u'|^2. \tag{3.3.6}$$

我们能用这来估计 R:

$$|R| \le |u'|^2 \sum |\partial_i g^{jk}| \le 4e(u)\sum |\partial_i g^{jk}|.$$

设 $E(t) = \int e(u(t,x))\mathrm{d}x$, 则

$$\begin{aligned} \partial_0 E(t) &= \int \partial_0 e(u)(t,x)\mathrm{d}x \\ &= \int \operatorname{div}(\partial_0 u \sum g^{jk}\partial_k u - \frac{1}{2}\sum g^{jk}\partial_j u \partial_k u \mathbf{1})\mathrm{d}x \\ &= \int \partial_0 u \Box_g u \mathrm{d}x + \int R \mathrm{d}x \\ &= \int \partial_0 u(t,x)F(t,x)\mathrm{d}x + \int R\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

这样,

$$\begin{aligned} \partial_0 E(t) &\le \|F(t,\cdot)\|_{L^2}\|\partial_0 u(t,\cdot)\|_{L^2} + \int |R|\mathrm{d}x \\ &\le 2\|F(t,\cdot)\|_{L^2}E(t)^{1/2} + 4\sum \|\partial_i g^{jk}(t,\cdot)\|_{L^\infty}E(t). \end{aligned}$$

就给出

$$\partial_0 E(t)^{1/2} \le \|F(t,\cdot)\|_{L^2} + 2\sum \|\partial_i g^{jk}(t,\cdot)\|_{L^\infty}E(t)^{1/2}.$$

意味着

$$\begin{aligned}
&\partial_0[E(t)^{1/2}\exp(-\int_0^t 2\sum\|\partial_i g^{jk}(s,\cdot)\|_{L^\infty}\mathrm{d}s)]\\
\leq\ &\|F(t,\cdot)\|_{L^2}\exp(-\int_0^t 2\sum\|\partial_i g^{jk}(s,\cdot)\|_{L^\infty}\mathrm{d}s)\\
\leq\ &\|F(t,\cdot)\|_{L^2}.
\end{aligned}$$

积分之, 得

$$E(t)^{1/2}\leq(E(0)^{1/2}+\int_0^t\|F(s,\cdot)\|_{L^2}\mathrm{d}s)\exp(\int_0^t 2\sum\|\partial_i g^{jk}(s,\cdot)\|_{L^\infty}\mathrm{d}s).$$

这个估计加上 (3.3.6) 就得到 (3.3.5).

§3.4 线性波动方程解的存在与唯一性

L 为如同 (3.2.4) 所设, 其所有系数均为 C^∞ 函数, 系数函数本身以及每个导数在 $(t,x)\in[0,T)\times\mathbb{R}^n$ 中一致有界。也假设 (3.3.4) 成立, 我们将用 命题 3.3.1 来证明下述结果。

定理 3.4.1 设 $s\in\mathbb{Z},0<T<\infty,L$ 如上。如果 $u\in C([0,T];H^{s+1})\cap C^1([0,T],H^s)$, 和 $Lu\in L^1([0,T];H^s)$, 则对于 $0<t<T$, 我们有

$$\sum_{|\alpha|\leq 1}\|\partial^\alpha u(t,\cdot)\|_{H^s}\leq C_{s,T}\left(\sum_{|\alpha|\leq 1}\|\partial^\alpha u(0,\cdot)\|_{H^s}+\int_0^t\|Lu(t,\cdot)\|_{H^s}\mathrm{d}t\right).\tag{3.4.1}$$

如果 X 是一个函数空间, 则记号 $F(t,x)\in C^\alpha([0,T];X)$ 意指在 $[0,T]$ 上, $F(t,\cdot)$ 是一个取值于 X 中的 C^α 函数。

在证明定理 3.4.1 之前, 我们先将其结果用来证明一个线性双曲型方程的存在唯一性结果。

定理 3.4.2 设 $s\in\mathbb{Z}$, 则对每个 $f\in H^{s+1}(\mathbb{R}^n),g\in H^s(\mathbb{R}^n)$ 和 $F\in L^1([0,T];H^s(\mathbb{R}^n))$ 存在唯一的

$$u\in C([0,T];H^{s+1})\cap C^1([0,T];H^s)\tag{3.4.2}$$

满足

$$\begin{cases}Lu=F, & 0<t<T,\\ u|_{t=0}=f, & \partial_t u|_{t=0}=g.\end{cases}\tag{3.4.3}$$

定理 3.4.2 的证明 唯一性 设 u_1,u_2 是 (3.4.3) 的两个解, 则 u_1-u_2 满足零初值与 $L(u_1-u_2)=0$。因此, 对于每个满足 (3.4.2) 的解, 我们应用 (3.4.1) 就能说明 $u_1-u_2=0$。

存在性 先设 $f=g=0$。

如果 $\psi\in C_0^\infty([-\infty,T)\times\mathbb{R}^n)$, 则用 (3.4.1) 到 L^*, 用 $T-t$ 取代 t, 得

$$\|\psi(t,\cdot)\|_{H^{-s}}\le\sum_{|\alpha|\le 1}\|\partial^\alpha\psi(t,\cdot)\|_{H^{-s-1}}\le C\int_0^T\|L^*\psi(\tau,\cdot)\|_{H^{-s-1}}\mathrm{d}\tau.$$

因此, 由于 H^s 和 H^{-s} 是对偶空间, 对固定的 $F\in L^1([0,T];H^s)$, 有

$$|\langle F,\psi\rangle|=|\int_0^T\langle F(t,\cdot),\psi(t,\cdot)\rangle\mathrm{d}t|\le C'\int_0^T\|L^*\psi(t,\cdot)\|_{H^{-s-1}}\mathrm{d}t.$$

这样, 由 Hahn-Banach 定理, 存在一个 $u\in L^\infty([0,T];H^{s+1})$ 满足当 $t<0$ 时 $u=0$。此外,

$$\langle F,\psi\rangle=\langle u,L^*\psi\rangle,\forall\psi\in C_0^\infty((-\infty,T)\times\mathbb{R}^n)$$

这样 $Lu=F$ 在 $(0,T)\times\mathbb{R}^n$ 中分布意义下成立。因此, 为完成证明, 我们得验证 (3.4.2), 且因此满足零初值。

首先, 设 $F\in C_0^\infty$, 则如果令 $v=\partial_t u$, (3.4.3) 成为

$$\begin{aligned}&\partial_t v+2\sum_{j=1}^n g^{j0}(t,x)\partial_j v+b^0 v\\
=&-\sum_{j,k\ge 1}g^{jk}(t,x)\partial_j\partial_k u-\sum_{j=1}^n b^j(t,x)\partial_j u-a(t,x)u+F(t,x)\\
\in&\ L^\infty([0,T];H^{s-1}),\end{aligned}$$

立即有 $\partial_t u=v\in L^\infty([0,T];H^{s-1})$。再次使用方程, 可得 $\partial_t^2 u\in L^\infty([0,T];H^{s-2})$。这样, $u\in C([0,T];H^{s-1})\cap C^1([0,T];H^{s-2})$。而这比 (3.4.2) 要弱一些, 但由于我们假设 $F\in C_0^\infty, f=g=0$, 可以用 $s+2$ 取代 s。随后得到一个满足 (3.4.2) 的解。对于这个解, 可以应用 (3.4.1)。

为移去对 F 的假设, 选取一个序列 $F_m\subset C_0^\infty$, 使得如果 F 如同定理所设

$$\int_0^T\|F(t,\cdot)-F_m(t,\cdot)\|_{H^s}\mathrm{d}t\to 0.$$

则如果 $u_m\in C([0,T];H^{s+1})\cap C^1([0,T];H^s)$ 解 $Lu_m=F_m$ 且满足零初值, 从 (3.4.1) 得 u_m 是 $C([0,T];H^{s+1})\cap C^1([0,T];H^s)$ 中的 Cauchy 序列, 其极限满足方程 (3.4.3) 和 (3.4.2)。

为求解给定 Cauchy 初值的方程, 先设初值属于 C_0^∞, 令 $u_0(t,x)=f(x)+tg(x)$, 使 u_0 正好满足初始条件, 则如果 $Lv=F-Lu_0$ 在 $t=0$ 满足零初值, 这就得到 $u=v+u_0$ 满足 (3.4.3) 和 (3.4.2)。假设光滑初值是保证 $Lu_0\in L^1([0,T];H^s)$, 应用 (3.4.1) 通过上面的逼近讨论, 这个假设可以移去。

为证 定理 3.4.1, 我们得先证一个以后将常用的结果。

引理 3.4.1 (Gronwall 不等式) 设 A, E 和 r 是 $[0,T]$ 上的有界非负函数, E 在 $[0,T]$ 上是增函数, 如果

$$A(t) \le E(t) + \int_0^t r(s)A(s)\mathrm{d}s,\ 0 \le t \le T,$$

则

$$A(t) \le E(t)\exp(\int_0^t r(s)\mathrm{d}s). \tag{3.4.4}$$

证明 只须证明：当 $t = T$ 时，上面的估计式是成立的。在这种情形 $E(t)$ 可以 $E = E(T) \ge E(t)$ 来取代。那么, 如果我们令对于 $0 < t < T$

$$B(t) = E + \int_0^t r(s)A(s)\mathrm{d}s,$$

$$\Longrightarrow B'(t) = r(t)A(t) \le r(t)B(t).$$

这样，

$$\partial_t(B(t)\exp(-\int_0^t r(s)\mathrm{d}s)) \le 0,$$

$$\Longrightarrow B(t)\exp(-\int_0^t r(s)\mathrm{d}s) \le B(s) = E,$$

$$A(t) \le B(t) \le \exp(\int_0^t r(s)\mathrm{d}s).$$

定理 3.4.1 的证明 第一步, 先证 $s = 0$ 的情形:

由于 L 的系数是有界的，

$$\|\sum(g^{jk}\partial_j\partial_k u)(\tau,\cdot)\|_{L^2} \le \|Lu(\tau,\cdot)\|_{L^2} + C\sum_{|\alpha|\le 1}\|\partial^\alpha u(\tau,\cdot)\|_{L^2}.$$

因此，(3.3.5) 推得

$$\|u'(t,\cdot)\|_{L^2} \le C_T\left(\|u'(0,\cdot)\|_{L^2} + \int_0^t (\|Lu(\tau,\cdot)\|_{L^2} + \sum_{|\alpha|\le 1}\|\partial^\alpha u(\tau,\cdot)\|_{L^2})\mathrm{d}\tau\right).$$

为估计 $u(t,\cdot)$ 本身的 L^2 范数，我们只要用微积分基本定理以及 Minkowski 积分不等式得

$$\|u(t,\cdot)\|_{L^2} \le \|u(0,\cdot)\|_{L^2} + \int_0^t \|\partial_t u(\tau,\cdot)\|_{L^2}\mathrm{d}\tau.$$

组合上述两个不等式得

$$\sum_{|\alpha|\le 1}\|\partial^\alpha u(t,\cdot)\|_{L^2}$$

$$\leq C_T\left(\sum_{|\alpha|\leq 1}\|\partial^\alpha u(0,\cdot)\|_{L^2}+\int_0^t(\sum_{|\alpha|\leq 1}\|\partial^\alpha u(\tau,\cdot)\|_{L^2}+\|Lu(\tau,\cdot)\|_{L^2})\mathrm{d}\tau\right).$$

因此，由 (3.4.4)，

$$\sum_{|\alpha|\leq 1}\|\partial^\alpha u(t,\cdot)\|_{L^2}\leq C'_T\left(\sum_{|\alpha|\leq 1}\|\partial^\alpha u(0,\cdot)\|_{L^2}+\int_0^t\|Lu(\tau,\cdot)\|_{L^2}\mathrm{d}\tau\right). \qquad (3.4.5)$$

第二步，$s\in\mathbb{N}$ 的情形：

通过除 g^{00}，不失一般性，我们可以假设 ∂_t^2 的系数是 1，则

$$L\partial_x^\alpha u=\partial_x^\alpha Lu+[L,\partial_x^\alpha]u,$$

其中 $[L,\partial_x^\alpha]=L\partial_x^\alpha-\partial_x^\alpha L$ 记交换子，是不超过 $|\alpha|+1$ 阶的，由于我们对 g^{00} 的假设，关于 t 的导数不会超过 1。因此，如果我们应用 (3.4.5) 到 $\partial_x^\beta u,|\beta|\leq s$，发现

$$\begin{aligned}
&\|\partial_x^\beta u(t,\cdot)\|_{L^2}+\|\partial_x^\beta u'(t,\cdot)\|_{L^2}\\
\leq\ & C(\|\partial_x^\beta u(0,\cdot)\|_{L^2}+\|\partial_x^\beta u'(0,\cdot)\|_{L^2}+\int_0^t(\|[L,\partial_x^\beta]u(\tau,\cdot)\|_{L^2}+\|\partial_x^\beta Lu(\tau,\cdot)\|_{L^2})\mathrm{d}\tau)\\
\leq\ & C(\|\partial_x^\beta u(0,\cdot)\|_{L^2}+\|\partial_x^\beta u'(0,\cdot)\|_{L^2}\\
&+\int_0^t(\sum_{|\alpha|\leq s}(\|\partial_x^\alpha u(\tau,\cdot)\|_{L^2}+\|\partial_x^\alpha u'(\tau,\cdot)\|_{L^2})+\|\partial_x^\beta Lu(\tau,\cdot)\|_{L^2})\mathrm{d}\tau).
\end{aligned}$$

关于 $|\beta|\leq s$ 求和，则用 Gronwall 不等式，得对于 $s=0,1,2\cdots$，

$$\begin{aligned}
&\sum_{|\alpha|\leq s}(\|\partial_x^\alpha u(t,\cdot)\|_{L^2}+\|\partial_x^\alpha u'(t,\cdot)\|_{L^2}) \qquad (3.4.6)\\
\leq\ & C\sum_{|\alpha|\leq s}\left(\|\partial_x^\alpha u(0,\cdot)\|_{L^2}+\|\partial_x^\alpha u'(0,\cdot)\|_{L^2}+\int_0^t\|\partial_x^\alpha Lu(\tau,\cdot)\|_{L^2}\mathrm{d}\tau\right).
\end{aligned}$$

对于这样的 s，等价于 (3.4.1)。

第三步，$s\in-\mathbb{N}$ 的情形：

令 $v(t,\cdot)=(I-\Delta)^s u(t,\cdot)$，其中 $\Delta=\Delta_x$。首先注意到

$$\|v(t,\cdot)\|_{H^{-s}}=\|(I-\Delta)^{s/2}u(t,\cdot)\|_{L^2}=\|u(t,\cdot)\|_{H^s}. \qquad (3.4.7)$$

由假设 $-s\in\mathbb{N}$，以及 (3.4.6) 得

$$\begin{aligned}
&\sum_{|\alpha|\leq -s}(\|\partial_x^\alpha v(t,\cdot)\|_{L^2}+\|\partial_x^\alpha v'(t,\cdot)\|_{L^2}) \qquad (3.4.8)\\
\leq\ & C\sum_{|\alpha|\leq -s}\left(\|\partial_x^\alpha v(0,\cdot)\|_{L^2}+\|\partial_x^\alpha v'(0,\cdot)\|_{L^2}+\int_0^t\|\partial_x^\alpha Lv(\tau,\cdot)\|_{L^2}\mathrm{d}\tau\right).
\end{aligned}$$

注意到 $(I-\Delta)^{-s}Lv=Lu+[(I-\Delta)^{-s},L]v$。因此，由 $(I-\Delta)^{s/2}$ 乘之，(3.4.8) 的最后一项能由下面估计

$$\sum_{|\alpha|\le -s}(\|\partial_x^\alpha Lv(\tau,\cdot)\|_{L^2}\approx\|Lv(\tau,\cdot)\|_{H^{-s}}\le\|Lu(\tau,\cdot)\|_{H^s}+\|[(I-\Delta)^{-s},L]v(\tau,\cdot)\|_{H^s}. \tag{3.4.9}$$

$[(I-\Delta)^{-s},L]$ 是 $\le -2s+1$ 阶的微分算子，关于 t 的导数并不包括大于 1 阶的项。因此

$$[(I-\Delta)^{-s},L]=\sum_{\substack{|\alpha|,|\beta|\le -s\\|\gamma|\le 1}}\partial_x^\alpha a_{\alpha\beta\gamma}\partial_x^\beta\partial^\gamma,$$

由于 L 的系数的假设，这里 $a_{\alpha\beta\gamma}=O(1)$。由于 $(I-\Delta)^{s/2}\partial_x^\alpha$ 在 L^2 上对 $|\alpha|\le -s$ 是有界的，得

$$\begin{aligned}\|[(I-\Delta)^{-s},L]v(\tau,\cdot)\|_{H^s}&\le C\sum_{\substack{|\beta|\le -s\\|\gamma|\le 1}}\|\partial_x^\beta\partial^\gamma v(\tau,\cdot)\|_{L^2}\\&\le C'\sum_{|\alpha|\le -s}\left(\|\partial_x^\alpha v(\tau,\cdot)\|_{L^2}+\|\partial_x^\alpha v'(\tau,\cdot)\|_{L^2}\right).\end{aligned} \tag{3.4.10}$$

由 (3.4.9) 和 (3.4.10),(3.4.8) 的左端可由

$$\sum_{|\alpha|\le -s}(\|\partial_x^\alpha v(0,\cdot)\|_{L^2}+\|\partial_x^\alpha v'(0,\cdot)\|_{L^2}$$
$$+\int_0^t\left(\|Lu(\tau,\cdot)\|_{H^s}+\|\partial_x^\alpha v(\tau,\cdot)\|_{L^2}+\|\partial_x^\alpha v'(\tau,\cdot)\|_{L^2}\right)\mathrm{d}\tau)$$

来控制。由 (3.4.7),(3.4.8) 的左端与 $\|u(t,\cdot)\|_{H^s}+\|u'(t,\cdot)\|_{H^s}$ 可比较。

用 Gronwall 不等式得

$$\sum_{|\alpha|\le 1}\|\partial^\alpha u(t,\cdot)\|_{H^s}\le C_{T,s}\left(\sum_{|\alpha|\le 1}\|\partial^\alpha u(0,\cdot)\|_{H^s}+\int_0^t\|Lu(\tau,\cdot)\|_{H^s}\right).$$

由此我们已经对负的 s 证明了 (3.4.1)，这就得证定理 3.4.1。

注 3.4.1 *为简单起见，我们仅对 $s\in\mathbb{Z}$ 叙述定理 3.4.1。然而，人们可用拟微分算子，把定理 3.4.1，定理 3.4.2 推广到 $s\in\mathbb{R}$。事实上，应用 (3.4.5) 到 $(I-\Delta)^{s/2}u$，我们可看到*

$$\begin{aligned}&\sum_{|\alpha|\le 1}\|\partial^\alpha u(t,\cdot)\|_{H^s}\\&\le C\left(\sum_{|\alpha|\le 1}\|\partial^\alpha u(0,\cdot)\|_{H^s}+\int_0^t(\|Lu(\tau,\cdot)\|_{H^s}+\|[L,(I-\Delta)^{s/2}]u(\tau,\cdot)\|_{L^2})\mathrm{d}\tau\right).\end{aligned}$$

由拟微分算子的演算，我们能说明

$$\|[L,(I-\Delta)^{s/2}]u(\tau,\cdot)\|_{L^2}\le C\sum_{|\alpha|\le 1}\|\partial^\alpha u(\tau,\cdot)\|_{H^s},$$

通过应用 Gronwall 不等式得到 (3.4.1) 对 $s\in\mathbb{R}$ 成立。

§3.5 L^∞ 衰减估计

这一节我们讨论线性波动方程的 L^∞ 估计，在定理 3.1.1 中通过解的表达式已有一个初步的估计：如果初值属于 C_0^∞, Cauchy 问题

$$\begin{cases}\Box u(t,x)=0, & t>0,\\ u(0,x)=f(x), & \partial_t u(0,x)=g(x)\end{cases}$$

的解是 $O((1+t)^{-\frac{n-1}{2}})$。我们将利用稳定位相法、Sobolev 不等式等给出精确的估计。

定理 3.5.1 设 u 是具 C_0^∞ 初始值 (f,g) 的波动方程的解，我们有

$$|u(t,x)|\le C(\|f\|_{W^{n,1}}+\|g\|_{W^{n-1,1}})(1+t)^{-(n-1)/2}.$$

对于 $t>1$, 我们有

$$|u(t,x)|\le C(\|f\|_{W^{[n/2]+1,1}}+\|g\|_{W^{[n/2],1}})t^{-(n-1)/2}.$$

证明 回顾 $A_tg(x)=\omega_{n-1}^{-1}\int_{|\xi|=1}g(x+t\xi)\mathrm{d}\xi$。如果 j 是大于 k 的整数，我们有

$$\begin{aligned}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^k A_tg(x) &= -\int_t^\infty\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right)^{k+1}A_sg(x)\mathrm{d}(s-t)\\ &= \frac{(-1)^{k-j}}{(j-k-1)!}\int_t^\infty (s-t)^{j-k-1}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right)^j A_sg(x)\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

因此，

$$\left|t^{k+1}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^k A_tg(x)\right|\le C\int_t^\infty t^{k+1}(s-t)^{j-k-1}\left|\int_{|\xi|=1}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right)^j g(x+s\xi)d\xi\right|\mathrm{d}s.$$

由于 $\mathrm{d}x=s^{n-1}\mathrm{d}s$, 我们要求 m 对于 $s\ge t$ 满足

$$t^{k+1}(s-t)^{j-k-1}\le t^{k+1}s^{j-k-1}=t^{k+1}s^{j-k-1-(n-1)}s^{n-1}\le Cs^{n-1}t^m.$$

即，$m+n=j+1, j\le n+k$. 由于 $j\ge k+1$, 如果 $1+k\le j\le n+k$, 我们最终有

$$t^{k+1}|A_t^{(k)}g(x)|\le Ct^{1-n+j}\int_{|y|>t}\sum_{|\alpha|=j}|D^\alpha g|(x+y)\mathrm{d}y. \tag{3.5.1}$$

我们也能由散度引理将球面平均转化为 $|y| < t$ 上的积分，即，对任何 $q = 1, \cdots, n$,

$$\int_{|\xi|=1} f(t\xi)\xi_q \mathrm{d}S(\xi) = t^{1-n} \int_{|y|\le t} \partial_q f(y)\mathrm{d}y.$$

这样，如果 $A_t^{(k)} g(x) = (\mathrm{d}/\mathrm{d}t)^k A_t g(x)$,

$$\begin{aligned}\omega_{n-1} A_t^{(k)} g(x) &= \int_{|\xi|=1} \sum_{|\alpha|=k} t^{-|\alpha|-1} \partial^\alpha g(x+t\xi)(t\xi)^\alpha \xi_q (t\xi^q)\mathrm{d}S(\xi) \\ &= t^{-n-k} \int_{|y|\le t} \sum_{|\alpha|=k} \partial_q(\partial^\alpha g(x+y)\cdot y^\alpha y_q)\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

用 t 估计 $|y|$, 我们得

$$\omega_{n-1} A_t^{(k)} g(x) \le t^{-n-k} \int_{|y|\le t} \sum_{|\alpha|=k,k+1} t^{|\alpha|} |\partial^\alpha g(x+y)|\mathrm{d}y.$$

如果 n 是奇数，则对于 $f = 0$ 时解的表达式

$$u_g = \sum_{k=0}^{(n-3)/2} a_k t^{k+1} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^k A_t g(x).$$

为用 (3.5.1)，注意到 $0 \le k \le (n-3)/2$, 我们须取 $(n-1)/2 \le j \le n$. 对于 $j = (n-1)/2$, 有

$$|u(x,t)| \le Ct^{(1-n)/2} \int_{|y|>1} \sum_{|\alpha|\le(n-1)/2} |D^\alpha g|(x+y)\mathrm{d}y,$$

对于 $j = n-1$, 有

$$|u(x,t)| \le C \int_{|y|>1} \sum_{|\alpha|\le(n-1)} |D^\alpha g|(x+y)\mathrm{d}y,$$

这样对于 $f = 0$ 我们证明了定理。为完成证明，必须对于 $0 \le k \le (n-1)/2$ 估计 $t^k A_t^{(k)} f(x)$。为此，只要如前对于 $j = (n+1)/2$ 和 $j = n$ 用 (3.5.1) 即可。

如果 n 是偶数，解可以表示为

$$u = \sum_{k=0}^{(n-2)/2} a_k t^{k+1} J_g^{(k)},$$

其中

$$J_g^{(k)} = \int_0^t \int_{|\xi|=1} t^{1-n} \frac{r^{n-1}\mathrm{d}r\mathrm{d}S(\xi)}{\sqrt{t^2-r^2}} \sum_{|\alpha|=k} \partial^\alpha g(x+r\xi)\left(\frac{r\xi}{t}\right)^\alpha.$$

为证对于 $t>1$ 的估计，我们将积分分成 $\int_0^{t-1/2}+\int_{t-1/2}^t$ 两部分。对于第一部分，可用 $(t^2-(t-1/2)^2)^{-1/2}=O(1/\sqrt{t})$ 估计 $1/\sqrt{t^2-r^2}$, 而其他项可用

$$t^{1-n}\int_{|y|\le t-1/2}\sum_{|\alpha|=k}|\partial^\alpha g(x+y)|\mathrm{d}y$$

来估计, 即 $O(t^{1/2-n})$。对于第二部分，将其写成

$$t^{1-n}\int_{t-1/2}^t\frac{r\mathrm{d}r}{\sqrt{t^2-r^2}}(r^{n-2}A_r^{(k)}g(x)),$$

对于 $j=k+1$ 用 (3.5.1)，有 $O(t^{1/2-n})$。这样, 对于 $t>1$，有

$$|t^{k+1}J_g^{(k)}|\le Ct^{1/2-n+[(n-2)/2+1]}\|g\|_{n/2}.$$

对于小 t, 由 $j=n-1$ 时的 (3.5.1) 可得

$$\begin{aligned}t^{k+1}J_g^{(k)} &\le Ct^{1-n}\int_0^t\frac{r^{n-1}A_r^{(k)}g(x)}{\sqrt{t^2-r^2}}\mathrm{d}r\\ &\le C\int_0^t(t/r)^{k+2-n}\frac{r^{k+1}A_r^{(k)}g(x)}{\sqrt{t^2-r^2}}\mathrm{d}r\\ &\le C\|g\|_{W^{n-1,1}}.\end{aligned}$$

这就证明了 $f=0$ 时的结论。对于一般情形的小时间我们可作类似的讨论。对于大时间，注意到要估计的解 $u_g+\partial u_f/\partial t$, 只要考虑第二项。令 $v=Su$ 其中 $S=t\partial_t+\sum_i x^i\partial_i$，这时的 v 是波动方程满足初始条件 $(0,(1+x^i\partial_i)f)$ 的解。对于固定的 T, 我们取光滑函数 η 在 $(0,1)$ 上为 1，在 $(0,2)$ 外围为 0。解满足初始条件 $(0,\eta(|x|/T)v_t(0))$ 的波动方程, 由有限传播速度知，其解与 v 在点 $(T,0)$ 一致，由我们刚才的估计可得

$$|v(T,0)|\le CT^{-\frac{n-1}{2}}\|\eta(|x|/T)v_t(0)\|_{W^{[n/2],1}}\le CT^{-\frac{n-1}{2}}(1+T)\|f\|_{W^{[n/2]+1,1}},$$

由于 $v(T,0)=Tu_t(T,0)$, 对于 $T>1$ 我们得所要求的估计。证毕!

这是波动方程解的 “L^1-L^∞” 估计，这个不等式给我们提供了两个信息：其一是当 $t\to\infty$ 时解的 $\|u\|_{L^\infty}$ 衰减率；其二相对于 Sobolev 不等式争得 $\frac{n-1}{2}$ 阶的正则性 ($L^\infty\hookrightarrow W^{n,1}$)。但这个不等式至少到现在为止还不太有用，目前更有用的是利用基于 Poincare 向量场和 Klainerman-Sobolev 不等式给出的不等式，我们希望这样的信息能得到充分的应用。为介绍所需的估计，我们首先注意到, 对任何 $n\ge 2$, 定理 2.5.4 意味着

$$\begin{aligned}|u'(t,x)| &\le C(1+t)^{-\frac{n-1}{2}}(1+|t-|x||)^{-1/2}\sum_{|\alpha|\le\frac{n+2}{2}}\|\Gamma^\alpha u'(t,\cdot)\|_{L^2}\\ &\le C'(1+t)^{-\frac{n-1}{2}}(1+|t-|x||)^{-1/2}\sum_{|\alpha|\le\frac{n+2}{2}}\|(\Gamma^\alpha u)'(t,\cdot)\|_{L^2},\end{aligned}\tag{3.5.2}$$

在最后一步中用了 (1.3.7)。注意到 $\Box\Gamma^\alpha u=0$, 这是由于 $[\Box,\Gamma^\alpha]u=C\Box u=0$。因此, 组合最后的不等式与对 $\Box$ 的能量不等式给出

$$|u'(t,x)|\le C(1+t)^{-\frac{n-1}{2}}(1+|t-|x||)^{-1/2}\sum_{|\alpha|\le\frac{n+2}{2}}\|(\Gamma^\alpha u)'(0,\cdot)\|_{L^2}. \tag{3.5.3}$$

用方程 $\Box u=0$, 我们看到, 像对 u 的 Cauchy 初值, $\Gamma^\alpha u$ 的 Cauchy 初值为 C_0^∞。事实上, $\Gamma^\alpha u$ 的 Cauchy 初值只包括作用于 f 和 g 的微分算子的有限组合。算子的系数未必是常数, 但这是无关紧要的, 由于 f 和 g 是紧支集的, 基于这, 我们得到

$$|u'(t,x)|\le C(1+t)^{-\frac{n-1}{2}}(1+|t-|x||)^{-1/2},$$

其中常数 C 依赖于初值, 来自于 (3.5.3) 的右边。

如果空间维数 n 是奇的, 则如果 $|t-|x||>R$, 且 f,g 的支集是在中心以原点半径为 R 的球中有 $u(t,x)=0$。这样, 由微积分的基本定理, 则对奇数的 n, $|u(t,x)|\le C(1+t)^{-\frac{n-1}{2}}$。另一方面, 如果 n 是偶数, 则我们仅能说如果 $|x|>t+R$, 则 $u(t,x)=0$。这样, 对 n 是偶数时, (3.5.3) 仅能导致形如

$$|u(t,x)|\le C(1+t)^{-\frac{n-1}{2}}(1+|t-|x||)^{1/2} \tag{3.5.4}$$

的界。这当然比第一节中 定理 3.1.1 中的更糟。

对于 Klein-Gordon 方程 $\Box u+m^2u=0, m\ne 0$, 相应的 L^∞ 估计可以叙述为

定理 3.5.2 设 u 是具初始值 (f,g) 的 Klein-Gordon 方程的解, 我们有

$$|u(x,t)|\le C(\|f\|_{W^{n+1,1}}+\|g\|_{W^{n,1}})(1+|t|)^{-n/2}.$$

对于 $t>1$, 我们有

$$|u(x,t)|\le C(\|f\|_{W^{[n/2]+2,1}}+\|g\|_{W^{[n/2]+1,1}})t^{-n/2}.$$

从定理的叙述可以看出我们曾介绍过的 Klein-Gordon 方程与波动方程的联系。用基本解可得对非齐次方程

$$\Box u+m^2u=f; u(0,\cdot)=u_0, \partial_t u(0,\cdot)=u_1$$

解的表示以及如下的定理

定理 3.5.3 如果 $u\in C^\infty(\{(t,x)\in\mathbb{R}^{1+n}; 0\le t\le T\})$ 当 $x\to\infty$ 时是速降的且是上述方程的解, 则

$$\begin{aligned}\sup_x|u(t,x)| \le\ & C\left((1+t)^{-n/2}\sum_{j=0}^{1}\sum_{|\alpha|+j\le n+1}\int|\partial^\alpha u_j(x)|\mathrm{d}x\right.\\ &\left.+\sum_{|\alpha|\le n}\int\int_{0<s<t}(1+t-s)^{-n/2}|\partial_x^\alpha f(s,x)|\mathrm{d}s\mathrm{d}x\right),\ 0\le t\le T.\end{aligned}$$

§3.6　波动方程的 Strichartz 估计

我们的目的是研究非线性问题，为了可以将非线性方程看成是相应的线性方程的扰动，假设解在某个函数空间中，但它经过非线性扰动后可能会落在另外一个空间中，如果这样的空间在适当强的意义下仍可以用解所在的空间来控制，我们就可能可以得到解的适定性。在此过程中我们得在适当的函数空间（如混合 Lebesgue 空间 $L_t^qL_x^r$，或混合 Sobolev 空间 $L_t^qW_x^{s,r}$）的框架下，设法用初值以及强迫项控制住这样的线性方程的解。我们已经知道的能量不等式就是其中的一个，它反映了波动方程解的正则性提高的信息，但这样的不等式却没有反映出我们常常所需的可积性增加的信息。这一节的目的就是要得到一个这两方面信息都能得到反映的 Strichartz 不等式。而这样的不等式是受 Fourier 限制定理的启发。

对于一个给定的函数 $m:\mathbb{R}_+\to\mathbb{C}$，我们记相应的 Fourier 乘子为

$$m(\mathrm{D})f:=\mathcal{F}^{-1}m(|\xi|)\hat{f}(\xi). \tag{3.6.1}$$

为此考虑具初值

$$\phi(0,x)=f(x),\ \partial_t\phi(0,x)=g(x)$$

的齐次波动方程

$$\Box\phi=0. \tag{3.6.2}$$

由 Fourier 变换我们能求解这个方程，得到对 ϕ 的一个精确公式：

$$\phi(t,x)=\mathcal{F}^{-1}\left(\cos(t|\xi|)\hat{f}(\xi)+\frac{\sin(t|\xi|)}{|\xi|}\hat{g}(\xi)\right). \tag{3.6.3}$$

对于非齐次问题

$$\begin{cases}\Box\psi=F,\\ \psi(0,x)=0,\ \partial_t\psi(0,x)=0.\end{cases} \tag{3.6.4}$$

我们可以得到

$$\psi(t,x)=\mathcal{F}^{-1}\left(\int_0^t\int\frac{\sin((t-\tau)|\xi|)}{|\xi|}\hat{F}(\tau,\xi)\mathrm{d}\tau\right). \tag{3.6.5}$$

记

$$\phi^{\pm}(t,x)=\mathcal{F}^{-1}\left(e^{\pm it|\xi|}\hat{f}_{\pm}(\xi)\right), \tag{3.6.6}$$

其中

$$\hat{f}_{\pm}(\xi)=\frac{1}{2}\hat{f}(\xi)\mp i\frac{\hat{g}(\xi)}{|\xi|}.$$

有时我们也记成

$$\phi^{\pm}(t)=e^{\pm it\mathrm{D}}f_{\pm}(\mathrm{D}).$$

我们可以把 (3.6.3) 写为 $\phi=\phi^++\phi^-$。类似地, 对 ψ, 有 $\psi=\psi^++\psi^-$, 其中

$$\psi^\pm(t,x)=\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{2i}\int_0^t e^{\pm i(t-s)|\xi|}\frac{\hat F(s,\xi)}{|\xi|}\mathrm{d}s\right)$$

或

$$\psi^\pm=\int_0^t(2i\mathrm{D})^{-1}e^{\pm i(t-s)\mathrm{D}}F(s,x)\mathrm{d}s.$$

(3.6.6) 说明 ϕ 的时空 Fourier 变换事实上是一个支集在锥面 $|\tau|=|\xi|$ 上的分布。更细致地, (+) 分量的支集在正锥 $\tau=|\xi|$ 和 (−) 分量的支集在负锥 $\tau=-|\xi|$, 这是由于

$$\tilde\phi^\pm(\tau,\xi)\simeq\delta(\tau\mp|\xi|)\hat f_\pm(\xi).$$

这些公式提示, ϕ 可认为是对应于 Fourier 变换在锥上的限制的对偶算子。我们可以试着重复对应于在球面上限制的 Stein 算子作过的同样的分析, 寻找用初值 (或初值的导数) 的 L^2 范数控制 ϕ 的 L^p 范数的估计。对于不包含导数的 ϕ 的任何估计将来自于 ϕ^+ 所对应的估计, 这是由于 ϕ^- 可以通过逆时变换得到 ϕ^+。因此, 从现在起, 我们仅考虑 (+) 分量。

不像球面, 锥并不是紧流形, 它有一个曲率为 0 的退化方向, 但仍有 $n-1$ 个方向的曲率不为 0 。正因为这样, 我们将看到对于 n 维波动方程的解, 得到类似于 $n-1$ 维球面的 Stein 算子的结果。沿着这个退化方向我们将通过用所考虑的算子的标尺度变换性质来得以刻画。因此能把问题转化到寻求一个具有附加性质, 即初值 f 和 g 的 Fourier 变换的支集在环形 $1/2\le|\xi|\le 2$ 上的解的估计。等价地, 这相当于考虑截断算子

$$Tf(t,x)=\int e^{i(t|\xi|+x\cdot\xi)}\beta(\xi)\hat f(\xi)\mathrm{d}\xi,$$

其中 $\beta\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ 是一个截断函数, 我们可以假设它有球面对称性质以及支集在区域 $1/2\le|\xi|\le 2$ 中, T 能看成是 Fourier 变换的一个限制算子,

$$\widetilde{Tf}(\tau,\xi)\simeq\delta(\tau-|\xi|)\beta(\xi)\hat f(\xi),$$

这说明 $\widetilde{Tf}$ 定义在一个 (截断) 锥上, 它是 Minkowski 空间 $\mathbb{R}^{1+n}$ 的一个子流形.

3.6.1 单频 Strichartz 估计

如同球面情形, 我们希望对于 $p\ge 2(n+1)/(n-1)$ 估计式

$$\|Tf\|_{L^p(\mathbb{R}^{1+n})}\lesssim\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

是对的, 对于具有 L^p 的混合范数的更一般的估计

$$\|Tf\|_{L_t^pL_x^r}\lesssim\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \tag{3.6.7}$$

也是对的。

注 3.6.1 证明这种类型的估计的一种办法是考虑 TT^* 算子，我们现在可以精确地计算。形式地，共轭 T^* 是由

$$\widehat{T^*F(\xi)} = (2\pi)^{-n}\overline{\beta(\xi)}\tilde{f}(|\xi|,\xi)$$

给出的，它与 T 复合得

$$TT^*F(t,x) \simeq \int e^{i[(t-s)|\xi|+(x-y)\cdot\xi]}|\beta(\xi)|^2 F(s,y)\mathrm{d}s\mathrm{d}y\mathrm{d}\xi,$$

重写上式为卷积形式

$$TT^*F(t,\cdot) = \int U(t-s)F(s,\cdot)\mathrm{d}s, \tag{3.6.8}$$

其中的演化算子

$$U(t)f(x) = \int e^{i(t|\xi|+x\xi)}|\beta(\xi)|^2\hat{f}(\xi)\mathrm{d}\xi. \tag{3.6.9}$$

(U 本质上就是算子 T!)

我们已经知道 (3.6.7) 等价于对 TT^* 的估计，

$$\|TT^*F\|_{L_t^q L_x^r} \lesssim \|F\|_{L_t^{q'} L_x^{r'}}.$$

注 3.6.2 由于算子 T 直接联系着齐次问题 (3.6.2) 的解，算子 TT^* 和非齐次问题 (3.6.4) 也有一个形式的联系．事实上，(3.6.5) 中 ψ 能写成积分

$$\int_0^t W(t-s)F(s)\mathrm{d}s \tag{3.6.10}$$

的虚部，其中 W 是由

$$(W(t)f)(x) = \int e^{i(t|\xi|+x\cdot\xi)}\frac{\hat{f}(\xi)}{|\xi|}\mathrm{d}\xi, \tag{3.6.11}$$

定义的算子。

如果 $\hat{F}(s,\xi)$ 的支集包含在区域 $1/2 < |\xi| < 2$，则 W 等价于 U，(3.6.10) 看上去非常像 (3.6.8)，仅有的不同是在时间积分的截断上。这使得我们不能将 (3.6.10) 作为 TT^* 型积分的一种分解。由于这个原因，我们引进一个与截断算子 T 相联系的滞后算子，

$$(TT^*)_R F(t,\cdot) = \int_0^t U(t-s)F(s,\cdot)\mathrm{d}s.$$

注 3.6.3 为了理解在相关 L^qL^r 估计式中什么是指标 q 和 r 的最优区域，考虑一个与 Knapp 反例类似的例子是有用的。

例 3.6.1 对某个小 $\delta > 0$, 令

$$D = \{\xi \in R^n : |\xi_1 - 1| < 1/2, |\xi'| < \delta\},$$

考虑 $f = \chi_D$, 注意到 $|\xi| - \xi_1 = \frac{|\xi'|^2}{|\xi|+\xi_1} \lesssim \delta^2$, 我们有

$$Tf(t,x) = e^{i(t+x_1)} \int_D e^{i[t(|\xi|-\xi_1)+(t+x_1)(\xi_1-1)+x'\cdot\xi']} \mathrm{d}\xi.$$

我们能选取一个时空区域 R, 定义如下:

$$|t| \lesssim \delta^{-2},\ |t+x_1| \lesssim 1,\ |x'| \lesssim \delta^{-1},$$

使得当 $(t,x) \in R, \xi \in D$ 时, 上面积分中的振荡因子能视为常数。因此, 对于 $(t,x) \in R$, $|Tf(t,x)| \gtrsim |D|$ 成立, 且有

$$\frac{\|Tf\|_{L_t^q L_x^r}}{\|f\|_{L^2}} \geq \frac{|D|\|\chi_R\|_{L_t^q L_x^r}}{|D|^{1/2}} \sim \delta^{\frac{n-1}{2}-\frac{2}{q}-\frac{n-1}{r}}.$$

令 $\delta \to 0$, 如同 (3.6.7) 的估计将要使得 q 和 r 满足条件

$$\frac{2}{q} \leq (n-1)(1/2 - 1/r). \tag{3.6.12}$$

注 3.6.4 对 q 还须另外的限制, 它是在时间平移下算子 TT^* 不变的一个推论。事实上, 对平移不变算子我们有 Hörmander 的一个一般的结果

命题 3.6.1 设 $1 \leq p, q < \infty$, 当 $p = \infty$ 时, 我们采用 L_0^∞, 即在无穷远处趋于零的 L^∞ 函数全体。$T : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^q(\mathbb{R}^n)$ 是一个与平移可交换的线性算子, 即对 $x, y \in \mathbb{R}^n$, $(Tf) \circ \tau_y = T(f \circ \tau_y)$, 其中 $\tau_y(x) = x + y$。如果 T 是从 L^p 到 L^q 的有界算子, 则我们有 $q \geq p$。

证明基于下面的引理:

引理 3.6.1 设 $1 \leq p < \infty$, $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, 当 $p = \infty$ 时, 我们采用 L_0^∞。则

$$\lim_{|y|\to\infty} \|f + f \circ \tau_y\|_{L^p} = 2^{1/p}\|f\|_{L^p}.$$

证明 对每个 $R > 0$, 考虑分解 $f = g_R + h_R$, 其中

$$g_R(x) = \begin{cases} f(x) & |x| < R, \\ 0 & |x| \geq R, \end{cases}$$

则

$$\lim_{R\to\infty} \|g_R\|_{L^p} = \|f\|_{L^p},\ \lim_{R\to\infty} \|h_R\|_{L^p} = 0.$$

对于 $R = |y|/2$, 我们有

$$f + f \circ \tau_y = g_R + g_R \circ \tau_y + h_R + h_R \circ \tau_y.$$

函数 g_R 和 $g_R \circ \tau_y$ 有不相交的支集, 使得

$$\|g_R + g_R \circ \tau_y\|_{L^p}^p = \|g_R\|_{L^p}^p + \|g_R \circ \tau_y\|_{L^p}^p = 2\|g_R\|_{L^p}^p,$$

而

$$\lim_{|y|\to\infty} \|h_R + h_R \circ \tau_y\|_{L^p} \le \lim_{|y|\to\infty} 2\|h_R\|_{L^p} = 0,$$

因此

$$\lim_{|y|\to\infty} \|f + f \circ \tau_y\|_{L^p} = \lim_{|y|\to\infty} 2^{1/p}\|g_R\|_{L^p} = 2^{1/p}\|f\|_{L^p}.$$

命题 3.6.1 的证明. 设 $C \in (0,\infty)$ 是对下述估计的最优常数

$$\|Tf\|_{L^q} \le C\|f\|_{L^p}, \forall f \in L^p.$$

则由线性性和平移不变性,

$$\|Tf + (Tf)\circ \tau_y\|_{L^q} \le C\|f + f\circ\tau_y\|_{L^p}.$$

当 $|y| \to \infty$ 时, 由引理我们得到

$$2^{1/q}\|Tf\|_{L^q} \le C2^{1/p}\|f\|_{L^p}, \forall f \in L^p.$$

C 的最优性意味着 $2^{1/p-1/q} \ge 1$, 因此 $q \ge p$。

这个命题容易推广到向量值的 L^p 空间, 如果我们考虑 TT^* 作为一个从 $L^{q'}(\mathbb{R}; L_x^{r'})$ 到 $L^q(\mathbb{R}; L_x^r)$ 的算子, 则我们必须有 $q \ge q'$, 这是条件

$$q \ge 2. \tag{3.6.13}$$

(3.6.12) 和 (3.6.13) 是对 q 和 r 的仅有的本质上的限制。

定义 3.6.1 我们说序对 (q,r) 是可接受的指标对 (对算子 T), 如果它们满足条件

$$q \ge 2,$$

$$2/q \le (n-1)(1/2 - 1/r),$$

$$(q,r,n) \ne (2,\infty,3).$$

定理 3.6.1 设 $(q,r),(q_1,r_1),(q_2,r_2)$ 是可接受的指标对, 则我们有估计

$$\|e^{itD}\beta(D)f\|_{L_t^q L_x^r} \lesssim \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}, \tag{3.6.14}$$

和

$$\|\int_0^t e^{i(t-s)D}\beta(D)F(s)ds\|_{L_t^{q_1} L_x^{r_1}} \lesssim \|F\|_{L_t^{q_2'} L_x^{r_2'}}. \tag{3.6.15}$$

其中 β 是一个球面对称的非负的紧支光滑函数。

定理 3.6.1 就是单频的 Strichartz 估计，它的证明与限制定理的第二个证明相似，其出发点是对算子 U 的 L^2-L^2 估计和 L^1-L^∞ 估计，然后作插值讨论。

这里我们用对偶方法给出这个单频非端点齐次 Strichartz 估计的证明。关于端点的齐次和非齐次估计，其证明非常精细，关键是将线性的估计双线性化，使之有更大余地去得到更多信息，有兴趣者可以参考 Keel-Tao 的原文 [30]。这里，我们说一个可接受允许对是端点组，如果 $(q,r)=(2,2\frac{n-1}{n-3})$ $(n\geq 3)$。

定理 3.6.1 中非端点齐次估计的证明: 首先，由对偶，我们有如下的等价关系

$$T: L_x^2 \to L_t^q L_x^r \Leftrightarrow T^*: L^{q'}L^{r'} \to L^2 \Leftrightarrow TT^*: L^{q'}L^{r'} \to L^q L^r.$$

于是我们只需证明

$$TT^*: L^{q'}L^{r'} \to L^q L^r, \tag{3.6.16}$$

这里算子 TT^* 的定义如下

$$TT^*F(t,x)=\int e^{i(t-s)D}\beta^2(D)F(s,x)\mathrm{d}s.$$

现在我们证明估计 (3.6.16)。由 L^2-L^2 估计和 L^1-L^∞ 估计，我们有

$$\|e^{i(t-s)\mathrm{D}}\beta^2(\mathrm{D})F(s,x)\|_{L^r} \leq \langle t-s\rangle^{-(n-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{r})}\|F(s)\|_{L^{r'}}.$$

再结合分数次 Hardy-Littlewood 不等式，如果

$$\frac{2}{q}=(n-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{r})\in(0,1) \tag{3.6.17}$$

就有

$$\begin{aligned}\|TT^*F(t,x)\|_{L^qL^r} &\leq \|\int\langle t-s\rangle^{-(n-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{r})}\|F(s)\|_{L^{r'}}\mathrm{d}s\|_{L_t^q}\\ &\leq \|F\|_{L^{q'}L^{r'}}\end{aligned}$$

而对于假设 (3.6.17) 中排除掉的端点 $(q,r)=(\infty,2)$，直接应用 L^2-L^2 估计即可得到估计 (3.6.16).

对于剩下的情况，也就是 (q,r) 满足条件

$$(n-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{r})\frac{q}{2}>1, \tag{3.6.18}$$

直接应用 Young 不等式就可以得到

$$\begin{aligned}\|TT^*F(t,x)\|_{L^r} &\leq \|\int\langle t-s\rangle^{-(n-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{r})}\|F(s)\|_{L^{r'}}\mathrm{d}s\|_{L_t^q}\\ &\leq \|\langle t\rangle^{-(n-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{r})}\|_{L^{\frac{q}{2}}}\|F\|_{L^{q'}L^{r'}} \leq \|F\|_{L^{q'}L^{r'}}\end{aligned}$$

由此定理中非端点齐次估计得证。

对于非齐次情形的证明，可直接来自于如下的 Christ-Kiselev 引理（ [7] 定理 1.2)。

引理 3.6.2 令 Y, Z 为巴拿赫空间, 假设 $K(t;s)$ 为取值于 $B(Y;Z)$ 的连续函数, 其中 $B(Y;Z)$ 是从 Y 到 Z 的有界线性映射组成的空间。取定 $-\infty \le a < b \le \infty$, 令

$$Tf(t) = \int_a^b K(t;s)f(s)\mathrm{d}s,$$

$$Wf(t) = \int_a^t K(t;s)f(s)\mathrm{d}s.$$

假设我们有

$$\|Tf\|_{L^q((a,b),Z)} \le C\|f\|_{L^p((a,b),Y)}\ , \tag{3.6.19}$$

则如果 $1 \le p < q \le \infty$,

$$\|Wf\|_{L^q((a,b),Z)} \le C(p,q)\|f\|_{L^p((a,b),Y)}.$$

直接应用该结论, 当 $q_1' < q_2$ 时, 我们有非齐次估计。唯一遗留的情况就是 $q_1' = q_2 = 2$ 的情形。而由 Sobolev 估计, 这时候的估计可以归结为 $r_1 = r_2 = 2\frac{n-1}{n-3}$ 的情形。注意到该估计恰是 Keel-Tao 的端点估计, 于是 定理 3.6.1 的非齐次情形得证。

3.6.2 波动方程的 Strichartz 估计

类似于上面的讨论, 我们可以证明如下的 Strichartz 估计

定理 3.6.2 设 $n \ge 2$, u 是问题

$$\begin{cases} \Box u(t,x) = F(t,x),\ t>0, x\in\mathbb{R}^n, \\ u(0,x) = f(x),\ \partial_t u(0,x) = g(x), \end{cases}$$

的解, 则

$$\|u\|_{L_t^q L_x^r} \lesssim \|f\|_{\dot H^s} + \|g\|_{\dot H^{s-1}} + \|F\|_{L_t^{\bar q'} L_x^{\bar r'}}, \tag{3.6.20}$$

其中 $s \ge 0, 2 \le q, \bar q \le \infty$ 和 $2 \le r, \bar r < \infty$ 服从于标尺度平衡条件: $1/q + n/r = n/2 - s = 1/\bar q' + n/\bar r' - 2$, $(q,r), (\bar q, \bar r)$ 以及满足相容性条件:

$$\frac{1}{q} + \frac{n-1}{2r}, \frac{1}{\bar q} + \frac{n-1}{2\bar r} \le \frac{n-1}{4}.$$

或下面的关于时间局部形式的估计

定理 3.6.3

$$\begin{aligned} &\|u\|_{L_t^q L_x^r([0,T]\times\mathbb{R}^n)} + \|u\|_{C_t \dot H_x^s([0,T]\times\mathbb{R}^n)} + \|\partial_t u\|_{C_t \dot H_x^{s-1}([0,T]\times\mathbb{R}^n)} \\ \le\ & C(q,r,s,n)\left(\|f\|_{\dot H_x^s(\mathbb{R}^n)} + \|g\|_{\dot H_x^{s-1}(\mathbb{R}^n)} + \|F\|_{L_t^{\bar q'} L_x^{\bar r'}([0,T]\times\mathbb{R}^n)}\right), \end{aligned}$$

其中的指标的要求与上面的定理相同。

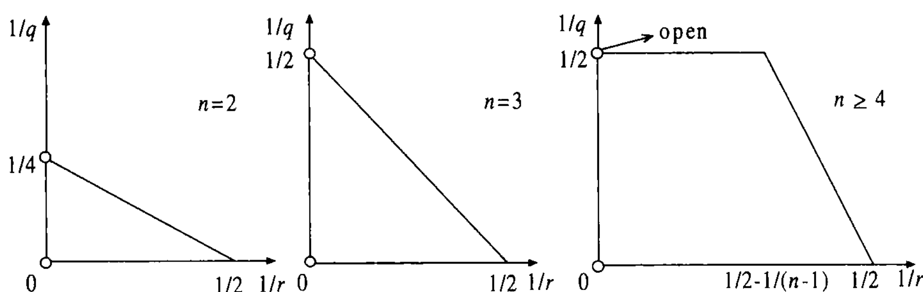


图 3.1

注 3.6.5 如图 *3.1*, 对于 $n \geq 4$, 可接受的指标区域对应于 $(1/q, 1/r)$ 平面中的以 $O = (1/\infty, 1/\infty), Q = (1/2, 1/\infty), P = (\frac{n-3}{2(n-1)}, 1/2)$ 和 $E = (1/\infty, 1/2,)$ 为端点的四边形 $OEPQ$。当 $n = 3$, 点 P 和 Q 一致, 这个区域就成为三角形 OEQ. 当 $n = 2$, 我们有一个更小的三角形 OEQ_2, 其中 $Q_2 = (1/\infty, 1/4)$。标准的 Strichartz 估计对应于点 $S = (\frac{n-1}{2(n+1)}, \frac{n-1}{2(n+1)})$。

齐次 Strichartz 估计的讨论已基本完善. 对于非齐次估计, 目前已知可以有更广泛的可接受允许对, 关于这方面的目前研究状态可以参看 Foschi [16] 及其参考文献.

有意思的情形是在线段 EP 和 PQ 上接近于 P 的情形, 由于所有其他情形都能从这些情形用 Sobolev 嵌入得到。点 E 对应于能量估计。Keel 和 Tao [30]证明了当 $n \geq 4$ 时端点 P 是允许的, 一般情形的 Q 点是否允许是未知的, 但王成波和我 [13]已经证明径向情形是允许的, 即径向 L^2L^∞ 估计成立; 对于 $n = 3$ 有反例说明 Q 是不允许的, 同样在球面对称情形 Klainerman 和 Machedon [37]证明是允许的。最近 Machihara, Nakamura, Nakanishi 和 Ozawa 在 [45]中证明了: 如果初值关于角变量具有更高的正则性, 则如果把 (3.6.20) 的左端范数替换成 $L_t^2 L_r^\infty L_\theta^p$, 其齐次估计仍然成立。实际上, 他们证明了该估计对于任意有限的 p 都成立; 空间维数为 2 时, 一般初值的端点估计不成立, 但在球面对称假设或角变量具额外正则性条件下 Strichartz 估计得到改善, 我们将在下一小节看到这一点。

注 3.6.6 波动方程的 Strichartz 估计既反映了方程的局部光滑性, 又反映了整体的衰减估计。用它得到的估计比用 Sobolev 不等式对固定时间得到的估计正则性要求要少。不过这个估计仅控制齐次 Sobolev 范数, 但非齐次 Sobolev 范数的低阶项估计可以通过对时间的积分来得到。特别地, 能量估计

$$
\begin{aligned}
&\|\nabla u\|_{C_t H_x^{s-1}([0,T]\times\mathbb{R}^n)} + \|\partial_t u\|_{C_t H_x^{s-1}([0,T]\times\mathbb{R}^n)} \\
\leq\ & C\left(\|\nabla f\|_{H_x^{s-1}(\mathbb{R}^n)} + \|g\|_{H_x^{s-1}(\mathbb{R}^n)} + \|F\|_{L_t^1 H_x^{s-1}([0,T]\times\mathbb{R}^n)}\right)
\end{aligned}
$$

可以看成是它的一个特例。能量估计的一个有用的特征是它可以争得一阶正则性, 而其他的 Strichartz 估计所争得的正则性要低于一次, 但作为补偿它争得了关于时空的可积性。

Strichartz 不等式的证明来自于调和分析中如下的事实以及上一小节中的单频 Strichartz 估计。

引理 3.6.3 设 $K(t,x;s,y)\in C(\mathbb{R}^{1+n}\times\mathbb{R}^{1+n})$, 令

$$(TG)(t,x)=\int_{\mathbb{R}^{1+n}}K(t,x;s,y)G(s,y)\mathrm{d}s\mathrm{d}y$$

对固定的 s 和 t 定义冻结算子

$$(T_{s,t}g)(x)=\int_{\mathbb{R}^n}K(t,x;s,y)g(y)\mathrm{d}y$$

假设 $\|T_{s,t}g\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}\le C_0|t-s|^{-1+(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2})}\|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$, 则如果 $1<r_1<r_2<\infty$, 我们有 $L^{r_1}(\mathbb{R})\to L^{r_2}(\mathbb{R})$ 中分数次积分的不等式

$$\|TG\|_{L_t^{r_2}L_x^q(\mathbb{R}^{1+n})}\le C_0C_{r_1,r_2}\|G\|_{L_t^{r_1}L_x^p(\mathbb{R}^{1+n})}$$

成立, 其中 C_{r_1,r_2} 是常数。

证明 如果用 Minkowski 积分不等式得

$$\|TG\|_{L_t^{r_2}L_x^q}\le\left(\int_R\left(\int_R\left(\int_{\mathbb{R}^n}|(T_{t,s}G(s,\cdot))(x)|^q\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}\mathrm{d}s\right)^{r_2}\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{r_2}}.$$

如果我们用上面的冻结算子假设, 得到这最后一项

$$\le C_0\left(\int\left(\int\|G(s,\cdot)\|_{L^p(\mathbb{R}^m)}|t-s|^{-1+(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2})}\mathrm{d}s\right)^{r_2}\mathrm{d}t\right)^{1/r_2}.$$

最后, 如果我们用 H-L 不等式即得

$$\le C_0C_{r_1,r_2}\left(\int\|G(t,\cdot)\|^{r_1}_{L^p(\mathbb{R}^n)}\mathrm{d}t\right)^{1/r_1}=C_0C_{r_1,r_2}\|G\|_{L_t^{r_1}L_x^p(\mathbb{R}^{1+n})}.$$

引理 3.6.4 设 $\beta\in C_0^\infty(\mathbb{R}_+)$ 满足 $\sum_{-\infty}^{+\infty}\beta(s/2^j)=1,s>0$ 定义 Littlewood-Paley 算子 $G_j(t,x)=(2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n}e^{ix\xi}\beta(|\xi|/2^j)\hat{G}(t,\xi)\mathrm{d}\xi$, 用空间 Fourier 变换, 则

$$\|G\|^2_{L_t^sL_x^q}\le C\sum_{j=-\infty}^{\infty}\|G_j\|^2_{L_t^sL_x^q},\ \text{如果}2\le q<\infty,2\le s\le\infty,$$

和

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty}\|G_j\|^2_{L_t^rL_x^p}\le\|G\|^2_{L_t^rL_x^p},\ \text{如果}1<p\le 2,\text{和}1\le r\le 2.$$

证明 证明依赖于 Littlewood-Paley 理论。具体地, 我们将用事实: 如果 $1<p<\infty$ 存在一个常数 $0<C=C_p<\infty$, 使得

$$C^{-1}\le\|(\sum|G_j(t,\cdot)|^2)^{1/2}\|^2_{L_x^p}/\|G(t,\cdot)\|^2_{L_x^p}\le C.$$

为看到这一点，我们集中在第一个不等式。如果用前面 Littlewood-Paley 不等式的前一不等式，得

$$\|G(t,\cdot)\|_{L_x^q}^2 \le C(\int_{\mathbb{R}^n}(\sum|G_j(t,\cdot)|^2)^{q/2}\mathrm{d}x)^{2/q}$$

然而，由于 $q/2\ge 1$, Minkowski 不等式意味着最后的表达式

$$\le C\sum\|G_j(t,\cdot)\|_{L_x^q}^2.$$

如果我们现在用这个事实 $s/2\ge 1$, 类似地得

$$\begin{aligned}\|G\|_{L_t^sL_x^q}^2 &= (\int\|G_j(t,\cdot)\|_{L_x^q}^{2\cdot\frac{s}{2}}\mathrm{d}t)^{2/s}\\ &\le C(\int(\sum\|G_j(t,\cdot)\|_{L_x^q}^2)^{s/2}\mathrm{d}t)^{2/s} = C\sum\|G_j\|_{L_t^sL_x^q}^2.\end{aligned}$$

另外的不等式的证明用第二个 Littlewood-Paley 不等式且是类似的.

由于 $n=3$ 时的波动方程是我们重点研究的对象，所以我们重点介绍 Sogge 对一些情形的 Strichartz 估计所作的更具体的探讨。

定理 3.6.4 设 u 是线性方程

$$\begin{cases}\Box u(t,x)=F(t,x), & (t,x)\in\mathbb{R}_+^{1+3},\\ u(0,\cdot)=f, & \partial_t u(0,\cdot)=g,\end{cases}\tag{3.6.21}$$

的一个弱解，则如果 $1/2\le\gamma\le 1$ 存在一个常数 C, 仅依赖于 q 和 γ 使得对每个 $T>0$

$$\begin{aligned}&\|u\|_{L_t^{\frac{2q}{(3-2\gamma)q-6}}L_x^q(S_T)}+\|u(T,\cdot)\|_{\dot H^\gamma(\mathbb{R}^3)}+\|\partial_t u(T,\cdot)\|_{\dot H^{\gamma-1}(\mathbb{R}^3)}\\ \le\ & C(\|f\|_{\dot H^\gamma(\mathbb{R}^3)}+\|g\|_{\dot H^{\gamma-1}(\mathbb{R}^3)}+\|F\|_{L_t^{\frac{2}{1+\gamma}}L_x^{\frac{2}{2-\gamma}}(S_T)}),\end{aligned}\tag{3.6.22}$$

其中的 $S_T=\{(t,x):0\le t\le T\}$。如果 γ,q 满足 $1/2\le\gamma<1$, $6/(2-\gamma)\le q\le 2/(1-\gamma)$ 或 $\gamma=1$, $6\le q<\infty$。如果 $0<\gamma<1$, 也有

$$\begin{aligned}&\|u\|_{L_t^{\frac{2}{\gamma}}L_x^{\frac{2}{1-\gamma}}(S_T)}+\|u(T,\cdot)\|_{\dot H^\gamma(\mathbb{R}^3)}+\|\partial_t u(T,\cdot)\|_{\dot H^{\gamma-1}(\mathbb{R}^3)}\\ \le\ & C_\gamma(\|f\|_{\dot H^\gamma(\mathbb{R}^3)})+\|g\|_{\dot H^{\gamma-1}(\mathbb{R}^3)}+\|F\|_{L_t^{\frac{2}{1+\gamma}}L_x^{\frac{2}{2-\gamma}}(S_T)}).\end{aligned}\tag{3.6.23}$$

注 3.6.7 (3.6.22) 或 (3.6.23) 的特殊情况 $\gamma=1/2$ 正是 Strichartz 得到的估计

$$\begin{aligned}&\|u\|_{L^4(S_T)}+\|u(T,\cdot)\|_{\dot H^{1/2}(\mathbb{R}^3)}+\|\partial_t u(T,\cdot)\|_{\dot H^{-1/2}(\mathbb{R}^3)}\\ \le\ & C(\|f\|_{\dot H^{1/2}(\mathbb{R}^3)}+\|g\|_{\dot H^{-1/2}(\mathbb{R}^3)}+\|F\|_{L^{4/3}(S_T)}).\end{aligned}\tag{3.6.24}$$

正如我们所指出的，这等价于 Fourier 变换的限制定理。为说明之，我们回顾如果 $g=0$ 和 $F=0$, 则

$$u(t,x)=(2\pi)^{-3}\int e^{ix\xi}\cos(t|\xi|)\hat f(\xi)\mathrm{d}\xi.$$

注意到 $\|f\|_{\dot{H}^{1/2}}^2 = \frac{1}{(2\pi)^3}\int |\hat{f}(\xi)|\xi|^{1/2}|^2 \mathrm{d}\xi$, 如果我们用其 Fourier 变换是 $\frac{\hat{f}(\xi)}{|\xi|^{1/2}}$ 的函数来取代 f, 就得对应于 $g=0, F=0$ 时的 (3.6.24) 的特殊情形意味着

$$T: L^2(\mathbb{R}^3) \to L^4(\mathbb{R}^{1+3}),$$

其中

$$Tf(t,x) = (2\pi)^{-3}\int_{\mathbb{R}^3} e^{ix\xi+it|\xi|}\hat{f}(\xi)\mathrm{d}\xi/|\xi|^{1/2}.$$

由对偶性, 上面的叙述等价于 $T^*: L^{4/3}(\mathbb{R}^{1+3}) \to L^2(\mathbb{R}^3)$,

$$\begin{aligned}(T^*G)(x) &= (2\pi)^{-3}\int\int_{\mathbb{R}^{1+3}} e^{ix\xi-it|\xi|}\hat{G}(t,\xi)\mathrm{d}t\mathrm{d}\xi/|\xi|^{1/2}\\ &= (2\pi)^{-3}\int_{\mathbb{R}^3} e^{ix\xi}\tilde{G}(|\xi|,\xi)\mathrm{d}\xi/|\xi|^{1/2}.\end{aligned}$$

其中 $\hat{G}$ 和 $\tilde{G}$ 分别记 $G(t,x)$ 的空间和时空 Fourier 变换。接下来, 如果我们用 Plancherel 定理可得

$$\|T^*G\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 = (2\pi)^{-3}\int_{\mathbb{R}^3}|\tilde{G}(|\xi|,\xi)|^2\mathrm{d}\xi/|\xi|.$$

这说明 Strichardz 估计 (3.6.24) 意味着对 $\mathbb{R}_+^{1+3}$ 中光锥的限制定理:

$$\int_{\mathbb{R}^3}|\tilde{G}(|\xi|,\xi)|^2\mathrm{d}\xi/|\xi| \le C\|G\|_{L^{4/3}(\mathbb{R}^{1+3})}^2, G\in\mathcal{S}. \tag{3.6.25}$$

容易验证上面的讨论能逆过来说明不等式 (3.6.24) 是对的, 这说明这两个估计是等价的。上面的限制定理和 (3.6.24) 能拓延到其他维数 $n\ge 2$, 在这种情形, 如 $G\in L^{\frac{2(n+1)}{n+3}}(\mathbb{R}^{1+n})$ 有一个限制在如上关于 Lorentz 不变测度 $\mathrm{d}\xi/|\xi|$ 的光锥上 L^2 函数的 Fourier 变换。

(3.6.22) 的另一个极端情形 $\gamma=1$ 由 Pecher 给出的, 这时的不等式为

$$\begin{aligned}&\|u'(T,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \|u\|_{L_t^{\frac{2q}{q-6}}L_x^q(S_T)}\\ \le\ & C_q\|u'(0,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} + C_q\int_0^T\|F(t,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\mathrm{d}t, 6\le q<\infty.\end{aligned} \tag{3.6.26}$$

注意到除了左边的混合范数项, 这个不等式与达郎贝尔的能量不等式一致, 在第七章中, (3.6.26) 将是在我们对 "临界波动方程"$\Box u = u^5$ 具任意 (未必小) 光滑初值的整体存在性的证明的关键。关于 (3.6.26) 要指出的最后一点是虽然当 $q=\infty$ 说它不对, 但对这个指数的不等式在球面对称的假设下确实成立。在这种情形, 不等式来自于能量不等式和 (3.6.68) 当 $q=2$ 时的对偶公式。

推论 3.6.1 设 u 是 (3.6.21) 的一个弱解。假如

$$3\le\kappa\le 5 \text{和} \gamma = \frac{3}{2} - \frac{2}{\kappa-1}. \tag{3.6.27}$$

则存在一个常数 C 仅依赖于 γ, 使得如果 $T>0$

$$\begin{aligned}&\|u\|_{L_t^{\frac{2\kappa}{1+\gamma}}L_x^{\frac{2\kappa}{2-\gamma}}(S_T)}+\|u(T,\cdot)\|_{\dot{H}^{\gamma}(\mathbb{R}^3)}+\|\partial_t u(T,\cdot)\|_{\dot{H}^{\gamma-1}(\mathbb{R}^3)}\\ \leq\ & C(\|f\|_{\dot{H}^{\gamma}(\mathbb{R}^3)}+\|g\|_{\dot{H}^{\gamma-1}(\mathbb{R}^3)}+\|F\|_{L_t^{\frac{2}{1+\gamma}}L_x^{\frac{2}{2-\gamma}}(S_T)})\end{aligned} \tag{3.6.28}$$

成立。如果

$$2<\kappa\leq 3\text{和}\gamma=1-\frac{1}{\kappa-1}, \tag{3.6.29}$$

也有

$$\begin{aligned}&\|u\|_{L_t^{\frac{2}{\gamma}}L_x^{\frac{2\kappa}{2-\gamma}}(S_T)}+\|u(T,\cdot)\|_{\dot{H}^{\gamma}(\mathbb{R}^3)}+\|\partial_t u(T,\cdot)\|_{\dot{H}^{\gamma-1}(\mathbb{R}^3)}\\ &\leq C_\gamma(\|f\|_{\dot{H}^{\gamma}(\mathbb{R}^3)}+\|g\|_{\dot{H}^{\gamma-1}(\mathbb{R}^3)}+\|F\|_{L_t^{\frac{2}{1+\gamma}}L_x^{\frac{2}{2-\gamma}}(S_T)}).\end{aligned} \tag{3.6.30}$$

注意到 (3.6.27) 能重新写成

$$1/2\leq\gamma\leq 1\text{和}\,\kappa=\kappa_\gamma=\frac{7-2\gamma}{3-2\gamma}. \tag{3.6.31}$$

由于对于 κ 的这个值和 γ 的这个范围, $\frac{6}{2-\gamma}\leq\frac{2\kappa}{2-\gamma}\leq\frac{2}{1-\gamma}$, 我们看到 (3.6.28) 是 (3.6.22) 的特殊情形。不等式 (3.6.30) 类似地来自于 (3.6.23), 由于 (3.6.29) 等价于

$$0<\gamma\leq 1/2\text{和}\,\kappa=\kappa_\gamma=\frac{2-\gamma}{1-\gamma}. \tag{3.6.32}$$

定理 3.6.5 设 u 是 (3.6.21) 的一个弱解, 则如果 $4\leq q<\infty$ 和 $\gamma=\gamma(q)=3/2-4/q$,

$$\begin{aligned}&\|u\|_{L^q(S_T)}+\|(\sqrt{-\Delta_x})^{\gamma-1/2}u\|_{L^4(S_T)}+\|u(T,\cdot)\|_{\dot{H}^{\gamma}(\mathbb{R}^3)}+\|\partial_t u(T,\cdot)\|_{\dot{H}^{\gamma-1}(\mathbb{R}^3)}\\ \leq\ & C_q(\|f\|_{\dot{H}^{\gamma}(\mathbb{R}^3)}+\|g\|_{\dot{H}^{\gamma-1}(\mathbb{R}^3)}+\|(\sqrt{-\Delta_x})^{\gamma-1/2}F\|_{L^{4/3}(S_T)})\end{aligned} \tag{3.6.33}$$

注 3.6.8 如果 $\Box u_0=0$ 具初值 (f,g), 上面的不等式本质上等价于

$$\|u_0\|_{L^q(\mathbb{R}_+^{1+3})}\leq C(\|f\|_{\dot{H}^{\gamma}(\mathbb{R}^3)}+\|g\|_{\dot{H}^{\gamma-1}(\mathbb{R}^3)}),4\leq q<\infty,\gamma=\frac{3}{2}-\frac{4}{q}. \tag{3.6.34}$$

不幸的是, 对任何 $q<4$ 没有这样的不等式能成立, 与此相关, 如果 $\kappa<3$, 在 (6.4.1) 中对于存在性人们需要多于 $3/2-2/(\kappa-1)$ 阶导数。然而, 如果假设了球面对称结果是可以改善的。首先, 我们将看到, (3.6.34) 对 $3<q<\infty$ 成立, 而由此可得当 $\kappa>1+\sqrt{2}$ 时的径向情形解的存在性仅需上面的正则性条件。

对于 定理 3.6.4 的证明, 我们先考察所证结论的内在联系, 发现可以归约到类似的于上章给出的对 $\mathbb{S}^1$ 的限制定理的证明相类似的不等式。

首先, 我们注意到 定理 3.6.4 的证明可转化成只要建立 (3.6.23) 和 $\gamma=1$ 的特殊情况即可。在 (3.6.22) 中另外的不等式只是来自于能量不等式和我们已经指出过的

一些不等式的插值。事实上，如果 $1/2 \le \gamma < 1$，则在 (3.6.22) 中取 $q = 2/(1-\gamma)$ 正是 γ 在这个范围的式 (3.6.23)。对应于 $q = 6/(2-\gamma)$ 的 (3.6.22) 来自于对 $\gamma = 1/2$ 的 (3.6.23)(即 (3.6.24)) 和

$$\|u\|_{L_t^\infty L_x^6} + \|u'(t,\cdot)\|_{L^2} \le C(\|f\|_{\dot{H}^1} + \|g\|_{L^2} + \|F\|_{L_t^1 L_x^2})$$

的插值。但这个不等式来自于能量不等式。由于 Sobolev 定理给出

$$\|u(t,\cdot)\|_{L_x^6} \le C\|u(t,\cdot)\|_{\dot{H}^1}$$

这样，对 $1/2 \le \gamma < 1$ 我们已经讨论了来自于 (3.6.23) 的 (3.6.22) 对两个端点 $q = 6/(2-\gamma)$ 或 $q = 2/(1-\gamma)$ 的表达式。由于对 $6/(2-\gamma) < q < 2/(1-\gamma)$ 的表达式可通过对于这些特殊情形的插值来得到。我们要完成证明断言的证明仅需给出当 $\gamma = 1$ 时 (3.6.22) 的证明。而这个不等式，如前指出的就是 (3.6.26)。

下面我们将 u 分解成 $v + w$，其中 v 是 Cauchy 问题:

$$\begin{cases} \Box v = 0, \\ v(0,\cdot) = f, \partial_t v(0,\cdot) = g, \end{cases}$$

的解，w 是非齐波动方程

$$\begin{cases} \Box w = F, \\ w(0,\cdot) = \partial_t w(0,\cdot) = 0, \end{cases}$$

的解。所以，为证 定理 3.6.4，我们只要证

$$\|v\|_{L_t^{\frac{2}{\gamma}} L_x^{\frac{2}{1-\gamma}}} + \|v'(T,\cdot)\|_{\dot{H}^{\gamma-1}} \le C_\gamma(\|f\|_{\dot{H}^\gamma} + \|g\|_{\dot{H}^{\gamma-1}}),\ 0 < \gamma < 1, \tag{3.6.35}$$

$$\|v\|_{L_t^{\frac{2q}{q-6}} L_x^q} + \|v'(T,\cdot)\|_{L^2} \le C_q(\|f\|_{\dot{H}^1} + \|g\|_{L^2}), 6 \le q < \infty. \tag{3.6.36}$$

以及

$$\|w\|_{L_t^{\frac{2}{\gamma}} L_x^{\frac{2}{1-\gamma}}} + \|w'(T,\cdot)\|_{\dot{H}^{\gamma-1}} \le C_\gamma \|F\|_{L_t^{\frac{2}{1+\gamma}} L_x^{\frac{2}{2-\gamma}}}, 0 < \gamma < 1, \tag{3.6.37}$$

$$\|w\|_{L_t^{\frac{2q}{q-6}} L_x^q} + \|w'(T,\cdot)\|_{L^2} \le C_q \|F\|_{L_t^1 L_x^2}, 6 \le q < \infty. \tag{3.6.38}$$

u' 记 u 的时空导数，因此

$$\|u'(T,\cdot)\|_{\dot{H}^{\gamma-1}} \approx \|u(T,\cdot)\|_{\dot{H}^\gamma} + \|\partial_t u(T,\cdot)\|_{\dot{H}^{\gamma-1}}.$$

在 (3.6.35)-(3.6.38) 中所有的范数都是取在 $\mathbb{R}_+^{1+3}$ 上的。注意到依赖区域的特点，即 Duhamel 原理，这样的不等式当然意味着在带形 $S_T = [0,T] \times \mathbb{R}^3$ 上满足。

我们从非齐估计开始，对 v 来自于类似的讨论并可稍为直接一些。如果我们用空间的 Fourier 变换，则

$$w(t,x) = (2\pi)^{-3} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} e^{ix\cdot\xi} \frac{\sin(t-s)|\xi|}{|\xi|} \hat{F}(s,\xi) d\xi ds.$$

因此, 如果我们令

$$(W^{\alpha}F)(t,x)=\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3}e^{ix\cdot\xi+i(t-s)|\xi|}\hat{F}(s,\xi)|\xi|^{-\alpha}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}s,$$

则 (3.6.37) 是

$$\|W^{\alpha}F\|_{L_t^{\frac{2}{\gamma}}L_x^{\frac{2}{1-\gamma}}}\leq C_{\gamma}\|F\|_{L_t^{\frac{2}{1+\gamma}}L_x^{\frac{2}{2-\gamma}}},\ 0<\gamma<1,\ \alpha=1 \tag{3.6.39}$$

和

$$\|W^{\alpha}F\|_{L_t^{\infty}L_x^2}\leq C_{\gamma}\|F\|_{L_t^{\frac{2}{1+\gamma}}L_x^{\frac{2}{2-\gamma}}},\ 0<\gamma<1,\alpha=1-\gamma \tag{3.6.40}$$

的推论。事实上, 由于 W^{α} 的虚部, $\alpha=1$ 是从 F 到 w 的算子, (3.6.39) 意味着 (3.6.37) 左边的第一项满足所要求的界, 而 (3.6.40) 和 Plancherel 定理意味着对其他项同样是对的。类似地, (3.6.38) 来自于

$$\|W^{\alpha}F\|_{L_t^{\frac{2q}{q-6}}L_x^q}\leq\|F\|_{L_t^1L_x^2},\ 6\leq q<\infty,\ \alpha=1. \tag{3.6.41}$$

由能量不等式, (3.6.38) 左边的第二项是 $\leq\|F\|_{L_t^1L_x^2}$。

如果 $\beta\in C_0^{\infty}(\mathbb{R}_+)$ 如同 引理 3.6.4, 如果我们定义环形算子

$$W_j^{\alpha}F(t,x)=\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3}e^{ix\cdot\xi+i(t-s)|\xi|}\beta(|\xi|/2^j)\hat{F}(s,\xi)|\xi|^{-\alpha}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}s$$

则我们先断言只要证明 (3.6.39)-(3.6.41) 的二进方式, 其中 W^{α} 由 W_j^{α} 来取代。常数与 $j\in\mathbb{Z}$ 无关。这来自于 引理 3.6.4。由于不等式左端的所有指数都 ≥ 2, 而右边是 ≤ 2。记住这点, 我们只要对断言的 (3.6.39) 加以证实, 由于对其他两个不等式的讨论是一样的。

为说明这个不等式来自于一致环形估计, 我们首先注意到必存在一个一致常数 C_0 使得

$$W_j^{\alpha}F=\sum_{\{k:|j-k|\leq C_0\}}W_j^{\alpha}F_k,$$

由于 $(W_j^{\alpha}F_k)(t,x)=\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3}e^{ix\cdot\xi+i(t-s)|\xi|}\beta(|\xi|/2^j)\beta(|\xi|/2^k)\hat{F}(s,\xi)|\xi|^{-\alpha}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}s$ 和如果 $|j-k|$ 适当大, $\beta(|\xi|/2^j)\beta(|\xi|/2^k)\equiv 0$。因此一致环形估计和 引理 3.6.4 就产生

$$\begin{aligned}\|W^{\alpha}F\|^2_{L_t^{2/\gamma}L_x^{2/(1-\gamma)}} &\leq C\sum_{-\infty}^{+\infty}\|W_j^{\alpha}F\|^2_{L_t^{2/\gamma}L_x^{2/(1-\gamma)}}\\ &\leq C'\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\sum_{|j-k|\leq C_0}\|F_k\|^2_{L_t^{2/(1+\gamma)}L_x^{2/(2-\gamma)}}\\ &\leq C''\|F\|^2_{L_t^{2/(1+\gamma)}L_x^{2/(2-\gamma)}}\end{aligned}$$

我们已经看到不等式来自于一致的环形估计，接下来的诱导将包括标尺度平衡的考虑意味着这些来自于特殊情形 $j=0$:

$$\|W_0^\alpha F\|_{L_t^{2/\gamma}L_x^{2/(1-\gamma)}} \leq C_\gamma \|F\|_{L_t^{2/(1+\gamma)}L_x^{2/(2-\gamma)}},\ 0<\gamma<1, \alpha=1. \tag{3.6.42}$$

$$\|W_0^\alpha F\|_{L_t^\infty L_x^2} \leq C_\gamma \|F\|_{L_t^{2/(1+\gamma)}L_x^{2/(2-\gamma)}}, 0<\gamma<1, \alpha=1-\gamma. \tag{3.6.43}$$

$$\|W_0^\alpha F\|_{L_t^{2q/(q-6)}L_x^q} \leq C_q \|F\|_{L_t^1 L_x^2},\ 6\leq q<\infty, \alpha=1. \tag{3.6.44}$$

为看到这一点，我们需要用如下恒等式

$$\text{如果}F_\lambda(t,x)=F(t/\lambda,x/\lambda),\lambda=2^j,\ \text{则}(W_j^\alpha F)(t,x)=\lambda^{-1-\alpha}(W_0^\alpha F_\lambda)(\lambda t,\lambda x).$$

由于这一点，如果 (3.6.42) 成立，则由变量变换我们得到对 $\alpha=1$

$$\begin{aligned}
\|W_j^\alpha F\|_{L_t^{2/\gamma}L_x^{2/(1-\gamma)}} &= \lambda^{-2}\lambda^{-\gamma/2}\lambda^{-3\frac{1-\gamma}{2}}\|W_0^\alpha F_\lambda\|_{L_t^{2/\gamma}L_x^{2/(1-\gamma)}}\\
&\leq C_\gamma\lambda^{-2}\lambda^{-\gamma/2}\lambda^{-3\frac{1-\gamma}{2}}\|F_\lambda\|_{L_t^{2/(1+\gamma)}L_x^{2/(2-\gamma)}}\\
&= C_\gamma\lambda^{-2}\lambda^{-\gamma/2}\lambda^{-3\frac{1-\gamma}{2}}\lambda^{(1+\gamma)/2}\lambda^{3\frac{2-\gamma}{2}}\|F\|_{L_t^{2/(1+\gamma)}L_x^{2/(2-\gamma)}}\\
&= C_\gamma\|F\|_{L_t^{2/(1+\gamma)}L_x^{2/(2-\gamma)}}
\end{aligned}$$

因此 (3.6.42) 意味着同样的界对算子 $W_j^\alpha, \alpha=1$ 成立。由于这个讨论意味着另两个不等式，现在接下来的是 (3.6.42)-(3.6.44) 的证明。

如果我们令 $a(t,s;\xi)=\beta(|\xi|)/|\xi|^\alpha$，如果 $0\leq s\leq t$，否则为 0，则我们能重新写 $W^\alpha F$ 为

$$(TF)(t,x)=\int\int e^{ix\cdot\xi+i(t-s)|\xi|}a(t,s;\xi)\hat{F}(s,\xi)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}s$$

则我们断言留下来的估计是下面命题的容易的推论。

命题 3.6.2 设 $\xi\to a(t,s;\xi), t,s\in\mathbb{R}$，是球面对称函数，属于 C_0^∞ 的一个有界子集，且如果 $|\xi|\notin[C^{-1},C], a(r,s;\xi)=0$，其中 $1<C<\infty$ 是一个固定的常数，则如果 $1<p\leq 2$,

$$\|TF\|_{L_t^{\frac{2p}{2-p}}L_x^{\frac{p}{p-1}}(\mathbb{R}^{1+3})} \leq C_p\|F\|_{L_t^{\frac{2p}{3p-2}}L_x^p(\mathbb{R}^{1+3})}, \tag{3.6.45}$$

$$\|TF\|_{L_t^\infty L_x^2(\mathbb{R}^{1+3})} \leq C_p\|F\|_{L_t^{\frac{2p}{3p-2}}L_x^p(\mathbb{R}^{1+3})}, \tag{3.6.46}$$

如果 $2\leq q<\infty$，则

$$\|TF\|_{L_t^s L_x^q(\mathbb{R}^{1+3})} \leq C_p\|F\|_{L_t^1 L_x^2(\mathbb{R}^{1+3})},\ \frac{2q}{q-2}\leq s<\infty. \tag{3.6.47}$$

显然 (3.6.46) 和 (3.6.47) 意味着 (3.6.43) 和 (3.6.44)。为得 (3.6.42) 我们首先注意到 (3.6.45) 和 (3.6.46) 之间的插值产生

$$\|TF\|_{L_t^{\frac{2q}{q-2}}L_x^q} \leq C_{p,q}\|F\|_{L_t^{\frac{2p}{3p-2}}L_x^p}. \tag{3.6.48}$$

假设 $1 < p \le 2$ 和 $2 \le q \le p/(p-1)$。对 $0 \le \gamma \le 1/2$, $p = 2/(2-\gamma)$ 和 $q = 2/(1-\gamma)$ 的特殊情形产生 (3.6.42), 由于这里 $q = 2/(1-\gamma) \le p/(p-1) = 2/\gamma$。为对 $1/2 \le \gamma < 1$ 证不等式, 我们注意到 (3.6.45) 和 (3.6.47) 之间的插值意味着 (3.6.48) 当 $2 \le q < \infty$ 和 $q/(q-1) \le p \le 2$ 时也必成立。这给出了 (3.6.42)$1/2 \le \gamma < 1$, 因为如果我们取 $q = 2/(1-\gamma)$ 和 $p = 2/(2-\gamma)$, 则 $q/(q-1) = 2/(1+\gamma) \le 2/(2-\gamma)$。这样, 我们可将非齐次估计 (3.6.37) 和 (3.6.38) 归结到上面的命题。

命题 3.6.2 的证明　首先注意到当 $s = 2q/(q-2)$ 时, 不等式 (3.6.47) 来自于 (3.6.46), 这只要通过对偶的讨论。由于 T^* 是与 T 同样的算子, $L_t^{\frac{2q}{q-2}} L_x^q$ 的对偶空间是 $L_t^{\frac{2p}{3p-2}} L_x^p, p = q/(q-1)$。(3.6.47) 当 $s = \infty$ 时容易来自于 Sobolev 定理和 Plancherel 不等式

$$
\begin{aligned}
\|(TF)(t,\cdot)\|_{L^q(\mathbb{R}^3)} &\le \int \| \int e^{ix\cdot\xi + i(t-s)|\xi|} a(t,s;\xi)\hat{F}(s,\xi)\mathrm{d}\xi \|_{L^q(\mathrm{d}x)} \mathrm{d}s \\
&\le C \int \|F(s,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \mathrm{d}s.
\end{aligned}
$$

由于 (3.6.47) 中另外的不等式来自于 $s = 2q/(q-2)$ 和 $s = \infty$ 两特殊情形的插值, 我们得到只要证明 (3.6.45) 和 (3.6.46). 但我们下面断言 (3.6.46) 实际上来自于 (3.6.45)。为看到这一点, 我们注意到, 如果 t_0 固定, 如果令 $(SF)(x) = (TF)(t_0, x)$, 则

$$
\begin{aligned}
\|TF(t_0,\cdot)\|_{L^2}^2 &= \int SF(x)\overline{SF(x)}\mathrm{d}x = \int (S^*SF)(t,x)\overline{F(t,x)}\mathrm{d}t\mathrm{d}x \\
&\le \|S^*SF\|_{L_t^{\frac{2p}{2-p}} L_x^{\frac{p}{p-1}}} \|F\|_{L_t^{\frac{2p}{3p-2}} L_x^p}.
\end{aligned} \tag{3.6.49}
$$

在最后一步中用了 Hölder 不等式, 但

$$
(S^*SF)(t,x) = \int\int e^{ix\cdot\xi + i(t-s)|\xi|} \tilde{a}(t,s;\xi)\hat{F}(s,\xi)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}s,
$$

其中 $\tilde{a}(t,s;\xi) = (2\pi)^3 a(t,t_0;\xi)\overline{a(t_0,s;\xi)}$。这样 S^*S 与算子 T 有同样的类型。因此, (3.6.45) 的证明将说明常数仅依赖于 a 以及其有限多阶导数的大小。这个不等式意味着 (3.6.49) 的右边 $\le C_p^2 \|F\|^2_{L_t^{\frac{2p}{3p-2}} L_x^p}$ 得 (3.6.46)。

这样, 我们落实到证明 (3.6.45)。对于这个我们将需要用 引理 3.6.3, 这样让我们定义冻结算子

$$
(T_{t,s}f)(x) = \int e^{ix\cdot\xi + i(t-s)|\xi|} a(t,s;\xi)\hat{f}(s,\xi)\mathrm{d}\xi,
$$

则我们断言

$$
\|T_{t,s}f\|_{L^{\frac{p}{p-1}}(\mathbb{R}^3)} \le C|t-s|^{-2(\frac{1}{p}-1/2)} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^3)}. \tag{3.6.50}
$$

由于 $(3p-2)/2p - (2-p)/2p = 2 - 2/p$, 利用上式与 引理 3.6.3 可以得到 (3.6.45)。

为证 (3.6.50)，只要证明 $p=1$ 和 $p=2$ 的特殊情形。由于其他的可以来自于插值。$p=2$ 时的不等式是具 $C=\sup|a|$ 的 Plancherel 定理的推论, 为证 $L^1\to L^\infty$ 界, 令 $x\to K(t,s;x)$ 记 $T_{t,s}$ 的卷积核:

$$K(t,s;x)=\int e^{ix\cdot\xi+i(t-s)|\xi|}a(t,s;\xi)\mathrm{d}\xi,$$

则只要证明

$$|K(t,s;x)|\le C_N(1+|t-s|)^{-1}(1+||t-s|-|x||)^{-N},\forall N. \tag{3.6.51}$$

对 $L^1\to L^\infty$ 估计我们仅需 $K=O(|t-s|^{-1})$; 然而, 这更细致的估计不难得到, 将用在定理 3.6.5 的证明中。

为证 (3.6.51) 我们需要 $\mathbb{S}^2$ 上的 Lebesgue 测度的 Fourier 变换恒等式

$$\hat{\mathrm{d}\sigma}(\xi)=\int_{S^2}e^{iw\cdot\xi}\mathrm{d}\sigma(w)=4\pi\frac{\sin|\xi|}{|\xi|}. \tag{3.6.52}$$

我们暂缓其证明, 而是说明它是如何被用在 (3.6.51) 的证明的。

第一步是注意到它给出

$$\begin{aligned}K(t,s;x)&=\int_0^\infty\int_{s^2}e^{ix\cdot\rho w}e^{i(t-s)\rho}a(t,s;\rho)\mathrm{d}\sigma(w)\rho^2\mathrm{d}\rho\\&=\frac{4\pi}{|x|}\int_0^\infty\sin(|x|\rho)e^{i(t-s)\rho}a(t,s;\rho)\rho\mathrm{d}\rho.\end{aligned}$$

如果我们关于 ρ 作分步积分，看到当 $|x|<1$ 时 (3.6.51) 成立.

为了看到对 $|x|>1$ 也成立, 当 $\rho>0$, 令 $b(t,s;\rho)=\rho a(t,s;\rho)$, 否则 0。则关于最后变量的 Fourier 变换满足 $|\hat{b}(t,s;\tau)|\le C_N(1+|\tau|)^{-N}$ 对任何 N, 其中常数与 s 和 t 无关, 这是由于关于 a 的假设。为看到这, 注意到我们能写 $K=K_++K_-$ 其中

$$K_\pm(t,s;x)=\frac{2\pi}{i|x|}\int e^{i((t-s)\pm|x|)\rho}b(t,s;\rho)\mathrm{d}\rho=\frac{2\pi}{i|x|}\hat{b}(t,s;\mp|x|-(t-s)).$$

由于我们看到 b 的部分 Fourier 变换意味着这最后的表达式满足 (3.6.51) 中如果 $|x|>1$ 的界. 我们仅得证明 (3.6.52)。这个公式的证明是容易的。由对称性, 我们可以假设 $\xi=(0,0,\xi_3)$。如果与公式 (3.1.11) 的证明同样的讨论, 我们发现

$$\hat{\mathrm{d}\sigma}(0,0,\xi_3)=2\pi\int_0^\pi e^{i\xi_3\cos\theta}\sin\theta\mathrm{d}\theta=2\pi\int_{-1}^1e^{i\xi_3\tau}\mathrm{d}\tau=4\pi\sin\xi_3/\xi_3.$$

定理 3.6.4 的证明之结束　我们仍须得到 (3.6.35) 和 (3.6.36) 的齐次估计。由于在不等式的左边除了混合型范数的所有的项被能量表达式估计, 只要看到如果 $\Box v=0$ 满足初值 (f,g), 则

$$\|v\|_{L_t^{2/\gamma}L_x^{2/(1-\gamma)}(\mathbb{R}^{1+3})}\le C_\gamma(\|f\|_{\dot{H}^\gamma(\mathbb{R}^3)}+\|g\|_{\dot{H}^{\gamma-1}(\mathbb{R}^3)}),0<\gamma<1,$$

$$\|v\|_{L_t^{2q/(q-6)}L_x^q(\mathbb{R}^{1+3})} \le C_q(\|f\|_{\dot{H}^1(\mathbb{R}^3)} + \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}), 6 \le q < \infty.$$

然而, 如果我们回顾第三章的第二节的 v 的 Fourier 变换的表示, 我们看到, 如果

$$(R^\alpha f)(t,x) = \int e^{ix\cdot\xi+it|\xi|}\hat{f}(\xi)\mathrm{d}\xi/|\xi|^\alpha,$$

则上面的不等式等价于

$$\|R^\alpha f\|_{L_t^{2/\gamma}L_x^{2/(1-\gamma)}(\mathbb{R}^{1+3})} \le C_\gamma\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^3)},\ \alpha = \gamma, \tag{3.6.53}$$

$$\|R^\alpha f\|_{L_t^{2q/(q-6)}L_x^q(\mathbb{R}^{1+3})} \le C_q\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}, \alpha = 1. \tag{3.6.54}$$

为证这两个不等式, 令 $\beta \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+)$ 如上, 定义二进算子

$$(R_j^\alpha f)(t,x) = \int e^{ix\cdot\xi+it|\xi|}\beta(|\xi|/2^j)\hat{f}(\xi)\mathrm{d}\xi/|\xi|^\alpha,$$

则如前, Littlewood-Paley 理论和标尺度平衡讨论说明上面的不等式来自于单位二进估计

$$\|R_0^\alpha f\|_{L_t^{2/\gamma}L_x^{2/(1-\gamma)}(\mathbb{R}^{1+3})} \le C_\gamma\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^3)},\ \alpha = \gamma, \tag{3.6.55}$$

$$\|R_0^\alpha f\|_{L_t^{2q/(q-6)}L_x^q(\mathbb{R}^{1+3})} \le C_q\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^3)},\ \alpha = 1,\ 6 \le q < \infty. \tag{3.6.56}$$

设 $(R_0^\alpha)^*$ 为共轭算子:

$$((R_0^\alpha)^*F)(x) = \int\int e^{ix\cdot\xi-is|\xi|}\beta(|\xi|)\hat{F}(s,\xi)|\xi|^{-\alpha}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}s.$$

则由对偶性,(3.6.55) 等价于

$$\|(R_0^\alpha)^*F\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \le C_\gamma\|F\|_{L_t^{2/(2-\gamma)}L_x^{2/(1+\gamma)}(\mathbb{R}^{1+3})}, 0 < \gamma < 1, \alpha = \gamma.$$

注意到如果 T 如同 命题 3.6.2, 则

$$((R_0^\alpha)^*F)(x) = (TF)(0,x),$$

如果说其象征是由 $a(t,s;\xi) = \beta(|\xi|)/|\xi|^\alpha$ 给出的。考虑到这一点, 这最后不等式 (3.6.35) 可来自 (3.6.46)。在这里我们已经用了事实: 如果 $p = 2/(1+\gamma)$, 则 $2p/(3p-2) = 2/(2-\gamma)$。剩下的不等式本质上来自同样的讨论。注意到 (3.6.56) 的对偶方式是

$$\|(R_0^\alpha)^*F\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \le C_q\|F\|_{L_t^{2q/(q+6)}L_x^{q/(q-1)}(\mathbb{R}^{1+3})}, 6 \le q < \infty \tag{3.6.57}$$

这里, 如果 $p = q/(q-1)$ 则 $2p/(3p-2) = 2q/(q-2)$。这样我们仅有 $1 \le 2q/(q+6) < 2p/(3p-2)$。因此, 我们不能用 (3.6.46) 直接得到 (3.6.56)。为得到这样的不等式, 我们注意到 Sobolev 估计给出 $T: L_t^1L_x^p \to L_x^2$, 由插值将 (3.6.46) 推广到

$$\|TF\|_{L_t^\infty L_x^2(\mathbb{R}^{1+3})} \le C_p\|F\|_{L_t^rL_x^p(\mathbb{R}^{1+3})}, 1 < p \le 2, 1 \le r \le \frac{2p}{3p-2}.$$

用这一个不等式我们得到 (3.6.57), 这就完成了 定理 6.4.1 的证明。

定理 3.6.5 **的证明** 我们首先看到 (3.6.24) 得到

$$\begin{aligned}&\|(\sqrt{-\Delta_x})^{\gamma-1/2}u\|_{L^4(S_T)}+\|u(T,\cdot)\|_{\dot H^\gamma(\mathbb{R}^3)}+\|\partial_t u(T,\cdot)\|_{\dot H^{\gamma-1}(\mathbb{R}^3)}\\ \le\ & C_q(\|f\|_{\dot H^\gamma(\mathbb{R}^3)}+\|g\|_{\dot H^{\gamma-1}(\mathbb{R}^3)}+\|(\sqrt{-\Delta_x})^{\gamma-1/2}F\|_{L^{4/3}(S_T)}).\end{aligned}$$

由于 $\Box(\sqrt{-\Delta_x})^{\gamma-1/2}u=(\sqrt{-\Delta_x})^{\gamma-1/2}F$ 和 $(\sqrt{-\Delta_x})^{\gamma-1/2}u$ 有 Cauchy 初值

$$((\sqrt{-\Delta_x})^{\gamma-1/2}f,(\sqrt{-\Delta_x})^{\gamma-1/2}g).$$

为证明 (3.6.33) 只要证明

$$\|u\|_{L^q(S_T)}\le C_q(\|f\|_{\dot H^\gamma(\mathbb{R}^3)}+\|g\|_{\dot H^{\gamma-1}(\mathbb{R}^3)}+\|(\sqrt{-\Delta_x})^{\gamma-1/2}F\|_{L^{4/3}(S_T)}),$$

如果 $4\le q<\infty,\gamma=3/2-4/q$。

如前, 将 u 分成齐次与非齐次两部分, 我们现在的任务是证明如果 γ 和 q 如上, 则

$$\|v\|_{L^q(\mathbb{R}^{1+3}_+)}\le C_q(\|f\|_{\dot H^\gamma(\mathbb{R}^3)}+\|g\|_{\dot H^{\gamma-1}(\mathbb{R}^3)}),\tag{3.6.58}$$

$$\|w\|_{L^q(\mathbb{R}^{1+3}_+)}\le C_q\|(\sqrt{-\Delta_x})^{\gamma-1/2}F\|_{L^{4/3}(S_T)}.\tag{3.6.59}$$

如果 R_0^α 如上, 则第一个不等式来自于如前证明, 对一个给定 α

$$\|R_0^\alpha f\|_{L^q(\mathbb{R}^{1+3}_+)}\le C_q\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^3)},4\le q<\infty.\tag{3.6.60}$$

这个估计对 $q=4$ 正是 $\gamma=1/2$ 时的 (3.6.55)。也是说由 Sobolev 引理, Plancherel 定理 $R_0^\alpha:L^2(\mathbb{R}^3)\to L^\infty(\mathbb{R}^{1+3})$。最后两个不等式的插值给出 (3.6.60)。

(3.6.59) 来自于二进估计

$$\|W_0^\alpha F\|_{L^q(\mathbb{R}^{1+3}_+)}\le C\|F\|_{L^{4/3}(\mathbb{R}^{1+3}_+)},4\le q\le\infty.\tag{3.6.61}$$

$q=4$ 时的不等式证明在前面已得, 由于, 对一个给定的 α,W_0^α 的核满足 (3.6.51) 中的界, 我们得到 $K(t,x,\cdot,\cdot)\in L^4(\mathbb{R}^{1+3}_+)$ 一致地成立, 因此 (3.6.61) 当 $q=\infty$ 时也成立。剩下来的不等式来自于 $q=4$ 和 $q=\infty$ 情形的插值。

3.6.3 球面对称情形的 Strichartz 估计

对于以球面对称函数作为初始值的齐次波动方程的 Strichartz 估计的可接受允许对的范围可以得到改善。

定理 3.6.6 假设 $n\ge 2$, (q,r,n) 是径向可接受允许对, 即 $q,r\ge 2$, $\frac{1}{q}<(n-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{r})$, 并且 $(q,r)\ne(\infty,\infty)$, 那么齐次波动方程的 Strichartz 估计 (3.6.20) 对任意球面对称初值成立。

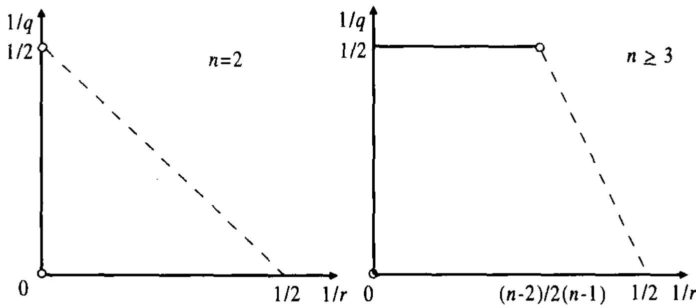


图 3.2

证明　不失一般性，我们仅需对 $g=0$ 的情形作出证明。这时的目标不等式可以写成

$$\|\exp(it\mathrm{D})f(x)\|_{L_t^q L_x^r} \lesssim \|f\|_{\dot{H}^s}. \tag{3.6.62}$$

这里 $s=n(\frac{1}{2}-\frac{1}{r})-\frac{1}{q}$。我们给出任意空间维数 ($n\geq 2$) 下的 $r=\infty$ 的估计。对于维数 $n\geq 3$ 时的 $q=2$ 的估计，可以参看 Sterbenz 的文章 [56] 的命题 1.2。如此整个估计则可以由这些估计与 $(q,r)=(\infty,2)$ 时的能量估计通过插值得到。

由旋转不变性，以及球面坐标变换，我们可令 $|x|=r$, $|\xi|=\lambda$, $x\cdot\xi=r\lambda\cos\theta=r\lambda y$, $\hat{g}(\lambda):=\lambda^{n-1}\hat{f}(\lambda)H(\lambda)\in L^1$。于是

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{it\mathrm{D}}f &= \int \mathrm{e}^{i(x\cdot\xi+t|\xi|)}\hat{f}(\xi)\mathrm{d}\xi \\
&\simeq \int_0^\pi\int_0^\infty \mathrm{e}^{i\lambda(t+r\cos\theta)}\hat{f}(\lambda)\lambda^{n-1}(\sin\theta)^{n-2}\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}\theta \\
&\simeq \int_0^\pi g(t+r\cos\theta)(\sin\theta)^{n-2}\mathrm{d}\theta \\
&= \int_{-1}^1 g(ry+t)(1-y^2)^{\frac{n-3}{2}}\mathrm{d}y := I(r,t)\ ,
\end{aligned}$$

如果 $n\geq 3$, $(1-y^2)^{\frac{n-3}{2}}\leq 1$, $|I(r,t)|\leq\int_{-1}^1|g(ry+t)|\mathrm{d}y=\frac{1}{r}\int_{t-r}^{t+r}|g(z)|\mathrm{d}z$，于是对于任意的满足 $2\leq q<\infty$ 的 q，

$$\|\mathrm{e}^{it\mathrm{D}}f\|_{L_t^qL_x^\infty}\lesssim\|I\|_{L_t^qL_r^\infty}\lesssim\|\mathcal{M}g(t)\|_{L^q}\lesssim\|g\|_{L^q}\lesssim\|g\|_{\dot{H}^{1/2-1/q}}\simeq\|f\|_{\dot{H}^{n/2-1/q}}\ ,$$

这里 $\mathcal{M}$ 代表通常的极大算子。对于 $n=2$ 的情况，注意到 $(1-y^2)^{-\frac{1}{2}}\in L_J^{p'}$，其中 $J=[-1,1]$, $p\in(2,\infty)$。于是 $|I(r,t)|\lesssim\|g(t+ry)\|_{L^p_{y\in J}}$，由此对于任意满足 $q\in(2,\infty)$ 的 q，令 $p=1+q/2$，则有

$$\begin{aligned}
\|\mathrm{e}^{it\mathrm{D}}f\|^q_{L_t^qL_x^\infty} &\lesssim \|g(t+ry)\|^q_{L_t^qL_r^\infty L^p_{y\in J}} \\
&= \||g(t+ry)|^p\|^{q/p}_{L_t^{q/p}L_r^\infty L^1_{y\in J}} \\
&\lesssim \|\mathcal{M}(|g|^p)(t)\|^{q/p}_{L_t^{q/p}} \\
&\lesssim \|g\|^q_{L^q}\lesssim\|g\|^q_{\dot{H}^{1/2-1/q}}\simeq\|f\|^q_{\dot{H}^{1-1/q}}.
\end{aligned}$$

注 3.6.9 对于满足径向允许对的 Strichartz 估计，$n=3$, $q=r$ 的结果属于 Sogge [55], $(q,r)=(2,\infty)$ 的结果属于 Klainerman 和 Machedon [37]; $n=2, 2<q\leq 4, r=\infty$ 以及 $n\geq 4, (q,r)=(2,\infty)$ 的结果属于我和王成波 [13]。特别值得一提的是，我们对于 $n\geq 4$ 的结果实际上解决了 Klainerman *1995* 年提的的一个猜测 [35]; 在 $n\geq 3$ 时可归属于 Sterbenz 的 [56]。

为应用的方便，我们特别以推论的形式写出如下特殊情形的 Strichartz 不等式：

推论 3.6.2 设 $\Box u_0=0, u_0(0,x)=f(x), \partial_t u_0(0,x)=g(x)$。如果 f,g 是球面对称的，则

$$\|u_0\|_{L^p_{t,x}(\mathbb{R}^{1+3}_+)}\leq C_p(\|f\|_{\dot H^\gamma(\mathbb{R}^3)}+\|g\|_{\dot H^{\gamma-1}(\mathbb{R}^3)}), \tag{3.6.63}$$
$$\gamma=3/2-4/p, 3<p<\infty$$

和

$$\|u_0\|_{L^p_{t,x}(\{(t,x)\in\mathbb{R}^{1+3}_+\mid\min\{t,|x|\}<1\})}\leq C_p(\|f\|_{\dot H^\gamma(\mathbb{R}^3)}+\|g\|_{\dot H^{\gamma-1}(\mathbb{R}^3)}), \tag{3.6.64}$$
$$\gamma=1/2-1/p, 2\leq p<3.$$

在这一小节的最后，我们再给出一个关于 Strichartz 估计在有一定角变量正则性假设下的改善的结果，在 $n\geq 4$ 时，该结果由 Sterbenz 在 [56] 中给出。对于 $n=3$, 他的文章中提到需要一个估计，而我们 [13] 发现那个估计恰好就是最近 Machihara, Nakamura, Nakanishi 和 Ozawa 他们在 [45] 中证明那个端点估计，于是我们可以把 Sterbenz 的结果表述如下：

定理 3.6.7 令 $\Omega_{i,j}$ 为角导数 $x_i\partial_j-x_j\partial_i$, 球面 Laplace 算子 $\Delta_{sph}:=\sum_{i<j}\Omega_{ij}^2$, 以及 $|\Omega|^s=(-\Delta_{sph})^{\frac{s}{2}}$, 并且定义

$$\|\langle\Omega\rangle^s u\|_{\dot H^b}=\|f\|_{\dot H^b}+\||\Omega|^s f\|_{\dot H^b}\,.$$

假设 $n\geq 3$, $\sigma_\Omega=n-1$, $\sigma=\frac{n-1}{2}$。于是对任意的 $\epsilon>0$, 存在一个只依赖 ϵ 的常数 C_ϵ, 使得如下估计对任意 $f\in\mathcal{S}$ 成立：

$$\|e^{itD}u(x)\|_{L^q_tL^r_x}\lesssim C_\epsilon\left(\|\langle\Omega\rangle^s f(x)\|_{\dot H^b}\right), \tag{3.6.65}$$

这里 $r<\infty$, $s=(1+\epsilon)(\frac{n-1}{r}+\frac{2}{q}-\frac{n-1}{2})$, $\frac{1}{q}+\frac{n}{r}=\frac{n}{2}-b$, $\frac{1}{q}+\frac{\sigma}{r}\geqslant\frac{\sigma}{2}$，以及 $\frac{1}{q}+\frac{\sigma_\Omega}{r}<\frac{\sigma_\Omega}{2}$。

3.6.4 其他的 L^pL^q 混合范数估计

我们将证明在 $(1+3)$ 维中非齐波动方程

$$\begin{cases}\Box w(t,x)=F(t,x),\ (t,x)\in\mathbb{R}^{1+3}_+,\\ w(0,x)=\partial_t w(0,x)=0,\end{cases}$$

的一些有用的估计。

径向估计将要求包括 L^pL^q 混合范数，为给出我们要用的记号，假设 $G(x,y)$ 是 $(x,y)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m$ 的一个函数，由

$$\|G\|_{L^p_xL^q_y}=\|\|G(x,\cdot)\|_{L^q(\mathbb{R}^m)}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}=(\int_{\mathbb{R}^n}\|G(x,\cdot)\|^p_{L^q(\mathbb{R}^m)}\mathrm{d}x)^{1/p}$$

来定义它的 $L^p_xL^q_y(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m)=L^p_x(\mathbb{R}^n;L^q(\mathbb{R}^m))$ 范数，在最后的等式中假设 $p<\infty$. 对 $p=\infty$, $\|G\|_{L^\infty_xL^q_y}=\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\|G(x,\cdot)\|_{L^q(\mathbb{R}^m)}$。

混合型范数的估计或 Strichartz 型估计将在我们以后对半线性方程的长时间存在性结果的讨论中扮演一个重要的角色。在证明 F. John 的定理中要用的不等式包含在下面的定理中。

命题 3.6.3 设 u_0 是 $\mathbb{R}^{1+3}_+$ 中线性 Cauchy 问题

$$\Box u_0=0,u_0(0,\cdot)=f,\partial_tu_0(0,\cdot)=g,$$

的解，如果 f,g 是球面对称的，则

$$\|u_0\|_{L_t^{\frac{\kappa(\kappa-1)}{3-\kappa}}L^\kappa_x(\mathbb{R}^{1+3}_+)}\leq C_\kappa(\|f\|_{\dot H^\gamma(\mathbb{R}^3)}+\|g\|_{\dot H^{\gamma-1}(\mathbb{R}^3)}),\tag{3.6.66}$$
$$\gamma=3/2-2/(\kappa-1),1+\sqrt{2}<\kappa<3,$$

和

$$\|u_0\|_{L^{\kappa^2}_tL^\kappa_x([0,T]\times\mathbb{R}^3)}\leq C_\kappa T^{\frac{1+2\kappa-\kappa^2}{\kappa^2}}(\|f\|_{\dot H^\gamma(\mathbb{R}^3)}+\|g\|_{\dot H^{\gamma-1}(\mathbb{R}^3)}),\tag{3.6.67}$$
$$\gamma=1/2-1/\kappa,2\leq\kappa<1+\sqrt{2}.$$

证明 (3.6.66) 可从 (3.6.63) 和下式

$$\|u\|_{L^\infty_tL^2_x}\leq C\|f\|_{L^2}+C\|g\|_{\dot H^{-1}}$$

的插值得到。

由 (3.6.67) 的标尺度平衡性质，我们只要证 $T=1$ 的情形。在这一情形可通过 (3.6.64) 和上式的插值得到。

定理 3.6.8 设 $F(t,x)\in C(\mathbb{R}^{1+3}_+)$ 是空间变量中的球面对称函数，设 w 是 $\mathbb{R}^{1+3}_+$ 中在 $t=0$ 具零 Cauchy 初值的非齐波动方程 $\Box w=F$ 的解，则如果 $S_T=\{(t,x):0\leq t\leq T\}$,

$$\||x|^{\frac{q-2}{q}}w(T,\cdot)\|_{L^q(\mathbb{R}^3)}\leq C_q\|F\|_{L^q_tL^1_x(S_T)},1\leq q<\infty,\tag{3.6.68}$$

$$\|w(T,\cdot)\|_{L^q(|x|<T)}\leq C_qT^{\frac{3-q}{q}}\|F\|_{L^\infty_tL^1_x(S_T)},1\leq q<3.\tag{3.6.69}$$

注 3.6.10 注意到我们已假设 $F(t,x)=F(t,|x|)$ 是球面对称的，证明将需要两个工具：即径向函数为非齐次项的波动方程的求解公式，以及 Hardy-Littlewood 最大值不等式。后者是说，如果

$$(Mf)(t)=\sup_{\rho>0}\frac{1}{2\rho}\int_{t-\rho}^{t+\rho}|f(s)|\mathrm{d}s,$$

则

$$\|Mf\|_{L^p(\mathbb{R})} \le C_p \|f\|_{L^p(\mathbb{R})}, 1 < p \le \infty.$$

(3.6.68) **的证明**　由于 F 是球面对称的，令 $r = |x|$, 我们有

$$rw(T,r) = 1/2 \int_0^T \int_{|r+s-T|}^{r+T-s} \rho F(s,\rho) \mathrm{d}\rho \mathrm{d}s.$$

因此，如果我们令

$$G(y) = \int_0^T \int_{|y-s|\le\rho} \rho^2 |F(s,\rho)| \frac{\mathrm{d}\rho}{\rho} \mathrm{d}s, \tag{3.6.70}$$

则

$$|rw(T,r)| \le G(T-r). \tag{3.6.71}$$

注意到由于 w 是球面对称的

$$\||x|^{\frac{q-2}{q}} w(T,\cdot)\|^q_{L^q(\mathbb{R}^3)} = 4\pi \int_0^\infty |rw(T,r)|^q \mathrm{d}r.$$

因此，(3.6.68) 来自于

$$\|G\|_{L^q(\mathbb{R})} \le C_q \|F\|_{L_t^q L_x^1(S_T)}, 1 \le q < \infty. \tag{3.6.72}$$

为证这一点，我们注意到 (3.6.72) 的左边等于

$$\begin{aligned}
&\sup_{\|f\|_{L^{\frac{q}{q-1}}(\mathbb{R})}=1} \left|\int f(r)G(r)\mathrm{d}r\right| \\
= &\sup_{\|f\|_{L^{\frac{q}{q-1}}(\mathbb{R})}=1} \left|\int\int (\frac{1}{\rho}\int_{s-\rho}^{s+\rho} f(r)\mathrm{d}r) F(s,\rho)\rho^2 \mathrm{d}\rho \mathrm{d}s\right| \\
\le &\ 2\int\int M(f)(s)|F(s,\rho)|\rho^2 \mathrm{d}\rho\mathrm{d}s \\
\le &\ 8\pi \|F\|_{L_t^q L_x^1} \cdot \|M(f)\|_{L^{\frac{q}{q-1}}(\mathbb{R})}.
\end{aligned}$$

由于如果 $1 \le q < \infty$ 则 $1 < \frac{q}{q-1} \le \infty$, 我们得 (3.6.72) 必成立，这来自 H-L 最大值不等式。

(3.6.69) **的证明**　由标尺度平衡的讨论，我们注意到能取 $T = 1$, 事实上，对一个给定的 $T > 0$ 我们令 $w_T(t,x) = w(Tt,Tx)$. 则 $\Box w_T = T^2 F(Tt,Tx)$. 因此，如果 (3.6.69) 对球面情形 $T = 1$ 成立，通过注意到

$$\begin{aligned}
\|w(T,\cdot)\|_{L^q(|x|<T)} &= T^{3/q}\|w_T(1,\cdot)\|_{L^q(|x|<1)} \\
&\le C_q T^{3/q} \|T^2 F(Tt,Tx)\|_{L_t^\infty L_x^1(S_1)} \\
&= C_q T^{-1+3/q}\|F\|_{L_t^\infty L_x^1(S_T)}.
\end{aligned}$$

我们能得一般情形的证明。因此为简单我们设 $T=1$, 如上讨论我们发现 (3.6.69) 的左边可由

$$\begin{aligned}&\sup_{\|f\|_{L^{\frac{q}{q-1}}([0,1])}=1}\left|\int f(r)G(r)\mathrm{d}r\right|\\ \le &\sup_{\|f\|_{L^{\frac{q}{q-1}}([0,1])}=1}\int\int M\left(r^{\frac{2-q}{q}}f\right)(s)F(s,\rho)\rho^2\mathrm{d}\rho\mathrm{d}s\end{aligned}$$

控制，这是由于 (3.6.69) 左边的 f 的范数仅取在 $r=|x|<1$ 上，我们仅需考虑支集在 $[0,1]$ 中的 f。如果我们选取 $\sigma>1$ 接近于 1, 上式的右边由

$$\|M(r^{\frac{2-q}{q}}f)\|_{L^\sigma}\|F\|_{L_t^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}L_x^1(S_1)}\le C_\sigma\|r^{\frac{2-q}{q}}f\|_{L^\sigma}\|F\|_{L_t^\infty L_x^1}$$

控制，最后一步用了 H-L 最大值定理。如果我们能说明对于 $2\le q<3$ 能选取 $\sigma>1$, 使得右边的前两个因子的积是 $O(1)$, 我们就有 (3.6.69)。但由于 $\frac{1}{\sigma}-\frac{q-1}{q}=\frac{q-\sigma(q-1)}{\sigma q}$, 由 Hölder 不等式及 f 的支集性质，如果我们能选取 $\sigma>1$ 使得 $\frac{(2-q)\sigma}{q-\sigma(q-1)}>-1$, 乘积必是

$$\le\|f\|_{L^{\frac{q}{q-1}}}\left(\int_0^1 r^{\frac{2-q}{q}\frac{\sigma q}{q-\sigma(q-1)}}\mathrm{d}r\right)^{\frac{1}{\sigma}-\frac{q-1}{q}}=C_{\sigma,q}$$

而这样的假设能成立是与 $q<3$ 等价的。(3.6.69) 证毕。

如果我们对分数次积分用 H-L 不等式我们能证明这些不等式的下列变形，当我们回到在径向对称假设下最佳正则性定理时是有用的。

定理 3.6.9 如上设 $\Box w=F,w$ 在 $t=0$ 有 Cauchy 零初值且 $F\in C(\mathbb{R}_+^{1+3})$ 是球面对称函数。则如果 $T>0$,

$$\|w\|_{L_t^{\frac{q(q-1)}{3-q}}L_x^q(S_T)}\le C_q\|F\|_{L_t^{\frac{q-1}{3-q}}L_x^1(S_T)},1+\sqrt{2}<q<3. \tag{3.6.73}$$

$$\|w\|_{L_t^\sigma L_x^q(S_T)}\le T^{\frac{1}{\sigma}-\frac{q-2}{q}}\|F\|_{L_t^qL_x^1(S_T)},2\le q<3,\sigma<\frac{q}{q-2}. \tag{3.6.74}$$

证明 如果我们回顾 (3.6.71), 看到

$$\|w\|^q_{L_t^{\frac{q(q-1)}{3-q}}L_x^q}\le\left(\int_0^\infty\left(\int_0^\infty|G(t-r)|^qr^{2-q}\mathrm{d}r\right)^{\frac{q-1}{3-q}}\mathrm{d}t\right)^{\frac{3-q}{q-1}}.$$

回顾对分数次积分的一维 H-L 不等式

$$\left\|\int H(t-r)|r|^{-1+\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2}}\mathrm{d}r\right\|_{L^{p_2}}\le C_{p_1,p_2}\|H\|_{L^{p_1}},1<p_1<p_2<\infty.$$

如果我们取 $p_1=\frac{q-1}{q(3-q)},p_2=\frac{q-1}{3-q}$ 则当然 $p_1<p_2$, 也有 $p_2<\infty$, 这是由于我们假设 $q<3$. 在 H-L 不等式中关于指数的另外的条件也满足，对 $p_1>1$ 这里等价于我们在

(3.6.73) 中的另外假设 $q > 1 + \sqrt{2}$. 最后，由于 $q - 2 = 1 - \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$, 如果在分数次积分不等式之中取 $H(t) = |G(t)|^q$, 我们得

$$\|w\|^q_{L_t^{\frac{q(q-1)}{3-q}} L_x^q} \leq C\|H\|_{L_t^{\frac{q-1}{q(3-q)}}} = C\|G\|^q_{L^{\frac{q-1}{3-q}}}.$$

如果现在用 (3.6.72) 我们看到能用 $\|F\|^q_{L_t^{\frac{q-1}{3-q}} L_x^1}$ 控制右端，(3.6.73) 得证。

(3.6.74) 的证明是类似的。通过标尺度平衡的考虑，我们可以取 $T = 1$, 通过用 Hölder 不等式我们也可以假设 $q \leq \sigma < \frac{q}{q-2}$. 在这些假设下,(3.6.74) 的右边是由

$$\left(\int_0^1 \left(\int_0^\infty |G(t-r)|^q r^{2-q} \mathrm{d}r\right)^{\frac{\sigma}{q}} \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{\sigma}} \leq \left(\int \left(\int K(t,s)|G(s)|^q \mathrm{d}s\right)^{\frac{\sigma}{q}} \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{\sigma}}$$

控制, 其中如果 $0 \leq t \leq 1, K(t,s) = |t-s|^{-(q-2)}$, 否则为 0. 如果我们用 Minkowski 不等式得

$$\begin{aligned}
&\left(\int \left(\int K(t,s)H(s)\mathrm{d}s\right)^{\frac{\sigma}{q}} \mathrm{d}t\right)^{\frac{q}{\sigma}} \\
\leq\ & \sup_s \left(\int |K(t,s)|^{\frac{\sigma}{q}} \mathrm{d}t\right)^{\frac{q}{\sigma}} \int |H(s)|\mathrm{d}s \\
=\ & \sup_s \left(\int_0^1 |s-t|^{-\sigma\frac{q-2}{q}} \mathrm{d}t\right)^{\frac{q}{\sigma}} \cdot \int |H(s)|\mathrm{d}s = C_\sigma \int |H(s)|\mathrm{d}s
\end{aligned}$$

取 $H(s) = |G(s)|^q$ 得 (3.6.74)。

在一般情形，我们有

定理 3.6.10 设 $F \in C^2(\mathbb{R}_+^{1+3})$, 则如果 $t + |x| > 1$,

$$(t+|x|)|w(t,x)| \leq C \int\int_{[0,t]\times\mathbb{R}^3} \sum_{|\alpha|\leq 2} |\Gamma^\alpha F(s,y)| \frac{\mathrm{d}s\mathrm{d}y}{1+s+|y|}. \tag{3.6.75}$$

证明 首先设 F 在原点的一个邻域中为 0. 在证明中我们要用包含函数 ψ 是零次齐次的且属于 $C^\infty(\mathbb{R}^{1+n}\backslash 0)$ 的单位分解将 F 分解. 由于我们的向量场的系数是一次或零次的，这就得到对这样的 ψ

$$\sum_{|\alpha|\leq 2} |\Gamma^\alpha(\psi F)| \leq C \sum_{|\alpha|\leq 2} |\Gamma^\alpha F|$$

下面我们为了记号的方便，将舍去单位分解的记号。

为证 (3.6.75) 我们将需要用下面的来自于这一章中第一节的公式

$$w(t,x) = \frac{1}{4\pi} \int_{|y|<t} F(t-|y|, x-y) \frac{\mathrm{d}y}{|y|} \tag{3.6.76}$$

我们将证明分成两个主要的情形，$|x| < t/2$ 和 $|x| > t/2$.

情形 1:$|x| < t/2$ 首先注意到, 由于 w 有零 Cauchy 初值, 如果 L_0 是径向向量场, 我们有

$$w(t,x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta} w(\theta t, \theta x)\mathrm{d}\theta = \int_0^1 (L_0 w)(\theta t, \theta x)\mathrm{d}\theta,$$

由于 $\Box L_0 w = L_0 \Box w + [\Box, L_0]w = L_0 F + 2F$, 我们能用 (3.6.76) 看到

$$|w(t,x)| \le \int_0^1 \int_{|y|\le \theta t} (|L_0 F| + |F|)(\theta t - |y|, \theta x - y)\frac{\mathrm{d}y}{|y|}\mathrm{d}\theta.$$

如果我们作变量变换 $(s,z) = (\theta t - |y|, \theta x - y)$, 则 $\mathrm{d}y\mathrm{d}\theta/|y| = \mathrm{d}s\mathrm{d}z/|t|y| - x\cdot y|$, 但由于 $|x| < t/2$, 有 $||y| - x\cdot y/t| \ge |y|/2$, 也有 $|z - sx/t| = ||y|x/t - y| \le 3|y|/2$。因此

$$\begin{aligned} t|w(t,x)| &\le 2\int\int (|L_0 F| + |F|)(s,z)\frac{\mathrm{d}s\mathrm{d}z}{|y|} \\ &\le 3\int\int (|L_0 F| + |F|)(s,z)\frac{\mathrm{d}s\mathrm{d}z}{|z - sx/t|} \end{aligned} \tag{3.6.77}$$

如果 F 的支集在满足 $|z| > 2s/3$ 的区域中, 则 (3.6.75) 是显然的, 由于 $|z - sx/t| > 3|z|/2$。如果 F 的支集在满足 $|z| < 3s/4$ 的区域中, 则我们需要用不同的讨论, 最终利用 (2.5.6)。为此要求下面的引理

引理 3.6.5 如果 $\phi(r) \in C^1$ 且对大 r 为 0,

$$\int_0^\infty |\phi(r)|r\mathrm{d}r \le 1/2\int_0^\infty |\phi'(r)|r^2\mathrm{d}r.$$

我们先承认之, 来完成情形 1 的证明。事实上如果以 $z = sx/t$ 为中心取极坐标, 我们得到

$$\int\int (|L_0 F| + |F|)(s,z)\frac{\mathrm{d}s\mathrm{d}z}{|z - sx/t|} \le \int\int (|\partial_z L_0 F| + |\partial_z F|)(s,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}s.$$

由于我们假设当 $|x| > 3s/4$ 时 F 为 0, 如果我们组合这与 (3.6.77) 和用 (2.5.6), 我们得到

$$t|w(t,x)| \le C\sum_{1\le|\alpha|\le 2}\int\int |\Gamma^\alpha F(s,z)|\mathrm{d}s\mathrm{d}z/(s + |z|) \tag{3.6.78}$$

其中和仅包含了齐次向量场。

情形 2: $|x| > t/2$。首先设 suppF 在满足 $|y| < s/3$ 的区域中, 则 Huygen's 原理意味着如果 $|x| \ge t$ 则 $w(t,x) = 0$。考虑到这一点, 所要求的估计来自于 (3.6.78), 这是由于如同上一步,. 我们假设 F 的支集在一个包含光锥内部的锥集上。

为完成 $|x| > t/2$ 的情形, 我们设 suppF 在满足 $|y| > s/4$ 的区域中, 则我们定义 F 的径向控制函数

$$F^*(t,r) = \sup_w |F(t, rw)|.$$

如果我们令 $w^*(t,x)$ 解具零初值的 $\Box w^*(t,x) = F^*(t,|x|)$, 则第三章第一节中提到的比较定理意味着 $|w| \le w^*$。再由于 w^* 是径向的, 来自于第三章的 (3.1.11) 给出

$$rw^*(t,x) = 1/2\int_0^t \int_{|r-(t-s)|}^{r+(t-s)} F^*(s,\rho)\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}s.$$

但如果我们用 Sobolev 在 $\mathbb{S}^2$ 上的引理, 得

$$F^*(s,\rho) \le C\sum_{|\alpha|\le 2} |(\Gamma^\alpha F)(s,\rho w)|\mathrm{d}\sigma(w),$$

其中和仅包括来自于 Euclidean 旋转的算子, 即 $\Gamma = \Omega_{ij}, 1 \le i < j \le n$。由于 $|w| \le w^*$, 我们能代这到最后的公式导致

$$\begin{aligned}|x||w(t,x)| &\le C\sum_{|\alpha|\le 2}\int\int |(\Gamma^\alpha F)(s,\rho w)|\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\sigma(w)\mathrm{d}s\\ &= C\sum_{|\alpha|\le 2}\int\int |(\Gamma^\alpha F)(s,y)|\mathrm{d}s\mathrm{d}y/|y|. \qquad (3.6.79)\end{aligned}$$

从这我们再得到 (3.6.75), 由于我们现在假设 $|x| > t/2$, 和在 suppF 上 $|y| > s/4$。

如果 F 在原点附近为 0, (3.6.75) 的证明就完成, 为了完成定理的证明, 我们必须说明如果当 $s+|y| > 1/100$(例如) 时 F 为 0, 不等式成立。由 Huygen's 原理这意味着如果 $|t-|x|| > 1/10$ 时, $w(t,x) = 0$。由于我们讨论的是在 (3.6.75) 中 $t+|x| > 1$, 这意味着我们仅得考虑 $|x| > t/2$ 的情形。如果我们再用 (3.6.79) 得

$$(t+|x|)|w(t,x)| \le C\int\int |F(s,y)|\mathrm{d}s\mathrm{d}y/|y| + C\sum_{1\le|\alpha|\le 2}\int\int |(\Gamma^\alpha F)(s,y)|\mathrm{d}s\mathrm{d}y/|y|.$$

如果我们用 引理 3.6.5, 我们看到右边的第一项是由 $|\partial_y F|$ 的积分来控制的。由于每个 Γ 是 Euclidean 角动量算子 Ω_{ij} 的一个, 和

$$|\Omega_{ij}F(s,y)| \le |y|\sum_{k=1}^n |\partial_k F(s,y)|.$$

故 $|\Gamma^\alpha F(s,y)| \le C|y|\sum_{1\le|\beta|\le 2}|(\partial_y^\beta F)(s,y)|$, 因此包含和的项也可由 (3.6.75) 的右边来控制。

引理 3.6.5 的证明. 我们首先考虑

$$\begin{aligned}\int_0^R |(R-r)\phi(r)|r\mathrm{d}r &= \int_0^R r|\int_r^R \frac{\partial}{\partial\rho}((R-\rho)\phi(\rho))\mathrm{d}\rho|\mathrm{d}r\\ &= \int\int_{0<r<\rho<R} r|(R-\rho)\phi'(\rho) - \phi(\rho)|\mathrm{d}\rho\mathrm{d}r\\ &\le 1/2\int_0^R (R|\phi'(\rho)| + |\phi(\rho)|)\rho^2\mathrm{d}\rho.\end{aligned}$$

由这一点我们得到

$$\begin{aligned}2R\int_0^R|\phi(r)|r\mathrm{d}r &\leq 2\int_0^R|(R-r)\phi(r)|r\mathrm{d}r+2\int_0^R|\phi(r)|r^2\mathrm{d}r\\&\leq \int_0^R(R|\phi'(\rho)|+3|\phi(\rho)|)\rho^2\mathrm{d}\rho.\end{aligned}$$

通过除以 R 及令 $R\to+\infty$ 得到所要求的不等式。由于我们假设 $\phi\in C^1$ 及对大的 r 为 0。

§3.7 齐次波动方程的双线性时空估计

这一节我们将介绍波动方程解的双线性时空估计，主要给出使得 L^2 估计成立的充要条件。这是 Klainerman 和 Foschi 的结果，有关不等式的证明我们在此就省去了，有兴趣的读者可参见原文 [17]。不过我们将给出其必要性的说明以及可能会比较有用的有关椭球与双曲球上积分的估计。

考虑分别满足 $\mathbb{R}^{1+n}$ 中齐次波动方程

$$\Box\phi=0,\Box\psi=0, \tag{3.7.1}$$

及在 $t=0$ 的初始条件，

$$\phi(0,\cdot)=\phi_0,\partial_t\phi(0,\cdot)=\phi_1,\psi(0,\cdot)=\psi_0,\partial_t\psi(0,\cdot)=\psi_1 \tag{3.7.2}$$

的两个解 ϕ 和 ψ。

我们研究由初值 (ϕ_0,ϕ_1) 和 (ψ_0,ψ_1) 来描述的乘积 $\phi\psi$ 的时空正则性。特别我们要寻找使得下述不等式

$$\begin{aligned}&\|D^{\beta_0}D_+^{\beta_+}D_-^{\beta_-}(\phi\psi)\|_{L^2(\mathbb{R}^{1+n})} \qquad (3.7.3)\\ \lesssim\ &(\|D^{\alpha_1}\phi_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}+\|D^{\alpha_1-1}\phi_1\|_{L^2(\mathbb{R}^n)})(\|D^{\alpha_2}\psi_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}+\|D^{\alpha_2-1}\psi_1\|_{L^2(\mathbb{R}^n)})\end{aligned}$$

成立的全体指标 $\alpha_1,\alpha_2,\beta_0,\beta_+,\beta_-\in\mathbb{R}$ 的集合。其中 D 和 D_+ 是 $\mathbb{R}^n$ 和 $\mathbb{R}^{1+n}$ 上的分数次齐次"椭圆"算子，对应于乘子 $|\xi|$ 和 $(|\tau|+|\xi|),\tau\in\mathbb{R}$ 和 $\xi\in\mathbb{R}^n$，

$$(D^\alpha f)\hat{}(\xi)=|\xi|^\alpha\hat{f}(\xi),$$

$$(D_+^\alpha F)\tilde{}(\tau,\xi)=(|\tau|+|\xi|)^\alpha\tilde{F}(\tau,\xi).$$

算子 D_- 对应于退化象征 $||\tau|-|\xi||$，反映了波算子 $\Box$ 的"双曲"特征，

$$(D_-^\alpha F)\tilde{}(\tau,\xi)=||\tau|-|\xi||^\alpha\tilde{F}(\tau,\xi).$$

分别用符号 "ˆ", "˜" 记 $\mathbb{R}^n$ 和 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的 Fourier 变换。

我们的主要定理是

定理 3.7.1 设 $n \geq 2, \phi, \psi$ 分别是 (3.7.1), (3.7.2) 的解。则 (3.7.3) 成立当且仅当 $\alpha_1, \alpha_2, \beta_0, \beta_+, \beta_-$ 满足下列条件：

$$\beta_0 + \beta_+ + \beta_- = \alpha_1 + \alpha_2 - \frac{n-1}{2}, \tag{3.7.4}$$

$$\beta_- \geq -\frac{n-3}{4}, \tag{3.7.5}$$

$$\beta_0 > -\frac{n-1}{2}, \tag{3.7.6}$$

$$\alpha_i \leq \beta_- + \frac{n-1}{2}, i = 1, 2, \tag{3.7.7}$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 \geq 1/2, \tag{3.7.8}$$

$$(\alpha_i, \beta_-) \neq (\frac{n+1}{4}, -\frac{n-3}{4}), i = 1, 2, \tag{3.7.9}$$

$$(\alpha_1 + \alpha_2, \beta_-) \neq (1/2, -\frac{n-3}{4}). \tag{3.7.10}$$

注 3.7.1 当 $n = 3, \phi = \psi, \alpha_1 = \alpha_2 = 1/2, \beta_0 = \beta_+ = \beta_- = 0$ 时，就是经典的 Strichartz 不等式

$$\|\phi\|_{L^4(\mathbb{R}^{1+3})} \lesssim \|D^{1/2}\phi_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \|D^{-1/2}\phi_1\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}.$$

注 3.7.2 (3.7.4) 的必要性直接来自于标尺度平衡的讨论。这将我们的参数限制到了 $(\alpha_1, \alpha_2, \beta_0, \beta_+, \beta_-)$ 空间中的四维多边形区域。

注 3.7.3 理解 定理 *3.7.1* 中条件的结构最好的方式是通过固定 (3.7.5) 和 (3.7.6) 的范围中的 β_- 和 β_0 的值。对于这些固定的值，(3.7.7),(3.7.8) 将 (α_1, α_2) 限制在以

$$\begin{aligned}
A_0 &= (\beta_- + \frac{n-1}{2}, \beta_- + \frac{n-1}{2}), \\
A_1 &= (\beta_- + \frac{n-1}{2}, -\beta_- - \frac{n-2}{2}), \\
A_2 &= (-\beta_- - \frac{n-2}{2}, \beta_- + \frac{n-1}{2})
\end{aligned}$$

为顶点的三角形区域中，如图 *3.3* 所示。最后，对于 (α_1, α_2) 固定，我们通过标尺度平衡 (3.7.4) 确定 β_+。当 (3.7.5) 成立时，除了临界情形 $\beta_- = -\frac{n-3}{4}$，三角形的边界是允许的。但在这种极端情形，由 (3.7.9) 和 (3.7.10)，边界是完全被禁止的。

注 3.7.4 在应用到非线性波动方程时最有用的情形似乎是 $\beta_- = 0$ 或 $\beta_- = 1/2$。这与包含零双线性形式的非线性方程有联系。

特别地，$n = 3, \beta_- = 0$ 是临界的，参数 α_1, α_2 的范围限制在三角形

$$-1/2 < \alpha_1, \alpha_2 < 1, \alpha_1 + \alpha_2 > 1/2$$

的内部。在 $\beta_- = 1/2$ 情形，对应的三角形的边也被包含，即

$$-1 \leq \alpha_1, \alpha_2 \leq 3/2, \alpha_1 + \alpha_2 \geq 1/2.$$

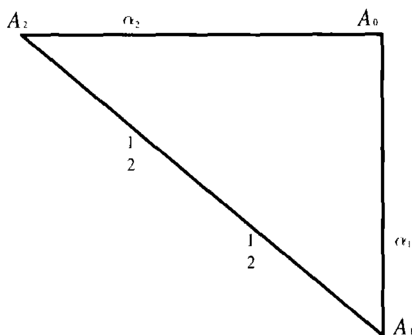


图 3.3

另外，$n = 2, \beta_- = 0$ 是被排除的。事实上，我们需要 $\beta_- \geq 1/4 > 0$。这与经典的 Strichartz 不等式

$$\|\phi^2\|_{L^3(\mathbb{R}^{1+2})} \lesssim (\|D^{1/2}\phi_0\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \|D^{-1/2}\phi_1\|_{L^2(\mathbb{R}^2)})^2$$

有联系。这个 L^3 范数的估计是最优的，即它不能用 $L^p, p < 3$ 来取代。另一方面，当 $n > 3$ 时, 对 β_- 的负值的估计是允许的。在处理非线性项含导数并且不满足零条件的波动方程 (如 $\Box u = |Du|^2$) 时是有用的。

3.7.1 一些记号与说明

我们知道 (3.7.1),(3.7.2) 的解能分解为 (+) 和 (−) 两部分：$\phi = \phi^+ + \phi^-$，其中

$$\tilde{\phi}^{\pm}(\tau, \xi) = \delta(\tau \mp |\xi|)\hat{\phi_0}^{\pm}(\xi),$$

$\phi_0^{\pm}$ 是 ϕ_0 和 $D^{-1}\phi_1$ 的线性组合，类似的讨论可用于 ψ。这样，它们的积就分解为四个部分

$$\phi\psi = \phi^+\psi^+ + \phi^+\psi^- + \phi^-\psi^+ + \phi^-\psi^-.$$

由对称性，仅要说明 (++) 和 (+−) 情形，因为 (−−) 可以通过逆时变成 (++)，而 (−+) 可以通过交换 ϕ_0 与 ψ_0 成为 (+−).

乘积的 Fourier 变换成为卷积，我们有

$$(\phi^+\psi^+)^{\sim}(\tau, \xi) \simeq \int \delta(\tau - |\eta| - |\xi - \eta|)\hat{\phi}_0^+(\eta)\hat{\psi}_0^+(\xi - \eta)\mathrm{d}\eta, \tag{3.7.11}$$

$$(\phi^+\psi^-)^{\sim}(\tau, \xi) \simeq \int \delta(\tau - |\eta| + |\xi - \eta|)\hat{\phi}_0^+(\eta)\hat{\psi}_0^-(\xi - \eta)\mathrm{d}\eta, \tag{3.7.12}$$

这两个积分看上去相似，但有不同的性态：(3.7.11) 是在以 0 和 ξ 为焦点的旋转椭球面

$$\mathcal{E}(\tau, \xi) = \{\eta \in \mathbb{R}^n : |\eta| + |\xi - \eta| = \tau\} \tag{3.7.13}$$

上的积分，这是一个紧流形；(3.7.12) 是在以 0 和 ξ 为焦点的旋转双曲面

$$\mathcal{H}(\tau,\xi)=\{\eta\in\mathbb{R}^n:|\eta|-|\xi-\eta|=\tau\} \tag{3.7.14}$$

上的积分，这是具无穷体积的无界流形。也注意到 $(\phi^+\psi^+)\tilde{}$ 的支集在区域 $\tau\geq|\xi|$，而 $(\phi^+\psi^-)\tilde{}$ 的支集在 $|\tau|\leq|\xi|$ 上。

注 3.7.5 积分表达式 (3.7.11) 和 (3.7.12) 中的 δ 函数可以看成是标准 δ 分布的拉回，或等价地支集在超曲面上的测度。设 S 是由 $\phi(x)=0$ 定义的超曲面，其中 ϕ 是一个光滑函数满足对 $x\in S\cap\mathrm{supp}f$ 有 $\nabla\phi(x)\neq 0$，且由 $\mathrm{d}S_x$ 记 S 上的面积元，则我们有

$$\int f(x)\delta(\phi(x))\mathrm{d}x=\int_S f(x)\frac{\mathrm{d}S_x}{|\nabla\phi(x)|}. \tag{3.7.15}$$

作为 (3.7.15) 的一个推论，我们有

$$\delta(\phi(x))=g(x)\delta(g(x)\phi(x)). \tag{3.7.16}$$

由 Plancherel 定理，主要的 (3.7.3) 来自于在频率空间中的下面的估计

$$\||\xi|^{\beta_0}(|\tau|+|\xi|)^{\beta_+}||\tau|-|\xi||^{\beta_-}(\phi^+\psi^\pm)\tilde{}(\tau,\xi)\|_{L^2_{\tau,\xi}}\lesssim\||\eta|^{\alpha_1}\hat{\phi}_0(\eta)\|_{L^2_\eta}\cdot\||\zeta|^{\alpha_2}\hat{\psi}_0(\zeta)\|_{L^2_\zeta},$$

这等价于双线性算子

$$B_{(++)},B_{(+-)}:L^2(\mathbb{R}^n)\times L^2(\mathbb{R}^n)\to L^2(\mathbb{R}^{1+n})$$

的有界性。其中 $B_{(++)},B_{(+-)}$ 定义如下：

$$\tilde{B}_{(++)}(f,g)(\tau,\xi)=\int\delta(\tau-|\eta|-|\xi-\eta|)\frac{|\xi|^{\beta_0}\tau^{\beta_+}(\tau-|\xi|)^{\beta_-}}{|\eta|^{\alpha_1}|\xi-\eta|^{\alpha_2}}f(\eta)g(\xi-\eta)\mathrm{d}\eta, \tag{3.7.17}$$

$$\tilde{B}_{(+-)}(f,g)(\tau,\xi)=\int\delta(\tau-|\eta|+|\xi-\eta|)\frac{|\xi|^{\beta_0+\beta_+}(|\xi|-|\tau|)^{\beta_-}}{|\eta|^{\alpha_1}|\xi-\eta|^{\alpha_2}}f(\eta)g(\xi-\eta)\mathrm{d}\eta, \tag{3.7.18}$$

注 3.7.6 由于这些是在下述意义下是正确的，即当 $f\geq 0,g\geq 0$ 时，$\tilde{B}_{(+\pm)}(f,g)\geq 0$，不失一般性，我们总能假设 $f\geq 0,g\geq 0$ 是非负函数。这将会简化记号，不必考虑绝对值。

为构造反例，考虑下面物理空间中的算子 $B_{(+\pm)}$ 的表示是有用的：

$$B_{(+\pm)}(f,g)(t,x)\simeq\int\int e^{i\phi_\pm(t,x;\eta,\zeta)}W_\pm(\eta,\zeta)f(\eta)g(\zeta)\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta, \tag{3.7.19}$$

$$\phi_\pm(t,x;\eta,\zeta)=t(|\eta|\pm|\zeta|)+x\cdot(\eta+\zeta), \tag{3.7.20}$$

$$W_+(\eta,\zeta)=\frac{|\eta+\zeta|^{\beta_0}(|\eta|+|\zeta|)^{\beta_+}(|\eta|+|\zeta|-|\eta+\zeta|)^{\beta_-}}{|\eta|^{\alpha_1}|\zeta|^{\alpha_2}}, \tag{3.7.21}$$

$$W_-(\eta,\zeta)=\frac{|\eta+\zeta|^{\beta_0+\beta_+}(|\eta+\zeta|-||\eta|+|\zeta||)^{\beta_-}}{|\eta|^{\alpha_1}|\zeta|^{\alpha_2}}. \tag{3.7.22}$$

3.7.2 椭球面与双曲球面上的积分

这一节我们将收集一些定义在 (3.7.13), (3.7.14) 中椭球面和双曲球面上的各种结果的几何性质。

为处理在椭球面 $\mathcal{E}(\tau,\xi)$ 上的积分, 我们考虑一个参数化的表达式

引理 3.7.1 *考虑定义在时空区域* $\tau \geq |\xi|$ *中的积分,*

$$I(F)(\tau,\xi)=\int \delta(\tau-|\eta|-|\xi-\eta|)F(|\eta|,|\xi-\eta|)\mathrm{d}\eta,$$

则

$$\begin{aligned}&I(F)(\tau,\xi) \qquad\qquad (3.7.23)\\ \simeq\ &(\tau^2-|\xi|^2)^{\frac{n-3}{2}}\int_{-1}^{1}F(\frac{\tau+|\xi|x}{2},\frac{\tau-|\xi|x}{2})(\tau^2-|\xi|^2x^2)(1-x^2)^{\frac{n-3}{2}}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

证明 由 (3.7.16)

$$\begin{aligned}\delta(\tau-|\eta|-|\xi-\eta|) &= (\tau-|\eta|+|\xi-\eta|)\delta((\tau-|\eta|)^2-|\xi-\eta|^2)\\ &= 2(\tau-|\eta|)\delta(\tau^2-|\xi|^2-2\tau|\eta|+2\xi\cdot\eta).\end{aligned}$$

对 η 引入极坐标, $\rho=|\eta|, w=\eta/|\eta|$, 和 $a=w\cdot\frac{\xi}{|\xi|}$, 则 $\mathrm{d}\eta=\rho^{n-1}\mathrm{d}S_w\mathrm{d}\rho$, $\mathrm{d}S_w=(1-a^2)^{\frac{n-3}{2}}\mathrm{d}S_{w'}\mathrm{d}a$ 。这样

$$\begin{aligned}&I(F)(\tau,\xi)\\ \simeq\ &\int_0^\infty\int_{-1}^{1}F(\rho,\tau-\rho)\delta(\tau^2-|\xi|^2-2\tau\rho+2|\xi|\rho a)(\tau-\rho)\rho^{n-1}(1-a^2)^{\frac{n-3}{2}}\mathrm{d}a\mathrm{d}\rho.\end{aligned}$$

用 δ 函数, 取 a 为

$$a=-\frac{\tau^2-|\xi|^2-2\tau\rho}{2|\xi|\rho}. \qquad (3.7.24)$$

条件 $-1\leq a\leq 1$ 导致 $(\tau-|\xi|)/2\leq\rho\leq(\tau+|\xi|)/2$,

$$\begin{aligned}&I(F)(\tau,\xi)\\ \simeq\ &\frac{1}{|\xi|}\int_{\frac{\tau-|\xi|}{2}}^{\frac{\tau+|\xi|}{2}}F(\rho,\tau-\rho)(\tau-\rho)\rho^{n-2}[1-(\frac{\tau^2-|\xi|^2-2\tau\rho}{2|\xi|\rho})^2]^{\frac{n-3}{2}}\mathrm{d}\rho\\ \simeq\ &\frac{(\tau^2-|\xi|^2)^{\frac{n-3}{2}}}{|\xi|^{n-2}}\int_{\frac{\tau-|\xi|}{2}}^{\frac{\tau+|\xi|}{2}}F(\rho,\tau-\rho)(\tau-\rho)\rho[(\frac{\tau+|\xi|}{2}-\rho)(\rho-\frac{\tau-|\xi|}{2})]^{\frac{n-3}{2}}\mathrm{d}\rho\end{aligned}$$

作变换 $\rho\longmapsto x=(2\rho-\tau)/|\xi|$ 得 (3.7.23)。

作为一个证明的副产品, 求 (3.7.24) 的逆我们得到对 $\eta\in\mathcal{E}(\tau,\xi)$ 的极坐标表示:

$$\rho=|\eta|=\frac{\tau^2-|\xi|^2}{2(\tau-\xi w)}\in[\frac{\tau-|\xi|}{2},\frac{\tau+|\xi|}{2}]. \qquad (3.7.25)$$

引理 3.7.2 设 $a \in R, m > -1$ 对于 $\lambda > 0$, 定义

$$H_m^a(\lambda) = \int_0^1 (\lambda + t)^a t^m \mathrm{d}t = \lambda^{a+m+1} \int_0^{1/\lambda} (1+s)^a s^m \mathrm{d}s.$$

则

$$H_m^a(\lambda) \approx \begin{cases} \lambda^a & \text{当}\lambda \to \infty; \\ \lambda^{\min(a+m+1,0)} & \text{当}\lambda \to 0, a+m+1 \neq 0; \\ |\log \lambda|, & \text{当}\lambda \to 0, a+m+1 = 0. \end{cases}$$

特别地，如果 $a \le b$ 则当 $\lambda \to 0, H_m^a(\lambda) \gtrsim H_m^b(\lambda)$。

命题 3.7.1 设 $a, b \in \mathbb{R}, \tau > |\xi|$。定义

$$I(\tau, \xi) = \int \frac{\delta(\tau - |\eta| - |\xi - \eta|)}{|\eta|^a |\xi - \eta|^b} \mathrm{d}\eta.$$

我们有下面的渐近性态：在区域 $\tau \ge 2|\xi|$,

$$I(\tau, \xi) \approx \tau^{n-1-a-b}; \tag{3.7.26}$$

在区域 $|\xi| < \tau < 2|\xi|$ 中，除 $\max\{a, b\} = \frac{n+1}{2}$ ，

$$I(\tau, \xi) \approx \tau^{n-1-a-b} (\frac{\tau}{|\xi|} - 1)^{n-1-\max\{a, b, \frac{n+1}{2}\}}, \tag{3.7.27}$$

而在 $\max\{a, b\} = \frac{n+1}{2}$

$$I(\tau, \xi) \approx \tau^{\frac{n-3}{2} - \min\{a, b\}} (\frac{\tau}{|\xi|} - 1)^{\frac{n-3}{2}} |\log(\frac{\tau}{|\xi|} - 1)|. \tag{3.7.28}$$

证明 在引理 3.7.1 中取 $F(s, t) = s^{-a} t^{-b}$, 我们得到

$$I(\tau, \xi) \simeq |\xi|^{2-a-b} (\tau^2 - |\xi|^2)^{\frac{n-3}{2}} \int_{-1}^1 (\frac{\tau}{|\xi|} + x)^{1-a} (\frac{\tau}{|\xi|} - x)^{1-b} (1 - x^2)^{\frac{n-3}{2}} \mathrm{d}x.$$

分解积分区域, $\int_{-1}^1 = \int_{-1}^0 + \int_0^1$, 在区间 $-1 \le x \le 0$ 上，令 $t = 1 + x$,

$$\frac{\tau}{|\xi|} + x \approx (\frac{\tau}{|\xi|} - 1) + t, \ \frac{\tau}{|\xi|} - x \approx \frac{\tau}{|\xi|}, \ 1 - x^2 \approx t;$$

而在 $0 \le x \le 1$ 上，令 $t = 1 - x$,

$$\frac{\tau}{|\xi|} + x \approx \frac{\tau}{|\xi|}, \ \frac{\tau}{|\xi|} - x \approx (\frac{\tau}{|\xi|} - 1) + t, \ 1 - x^2 \approx t;$$

我们得到

$$I(\tau, \xi) \approx |\xi|^{2-a-b} (\tau^2 - |\xi|^2)^{\frac{n-3}{2}} [(\frac{\tau}{|\xi|})^{1-a} H^{1-b}_{\frac{n-3}{2}} (\frac{\tau}{|\xi|} - 1)$$

$$+(\frac{\tau}{|\xi|})^{1-b}H^{1-a}_{\frac{n-3}{2}}(\frac{\tau}{|\xi|}-1)],$$

为得到结论我们对 $\lambda=\frac{\tau}{|\xi|}-1$ 用 引理 3.7.2。事实上, 当 $\frac{\tau}{|\xi|}\geq 2$ 时, 我们有

$$I(\tau,\xi)\approx|\xi|^{2-a-b}(\tau^2-|\xi|^2)^{\frac{n-3}{2}}(\frac{\tau}{|\xi|})^{1-a+1-b}\approx\tau^{n-1-a-b};$$

而当 $1\leq\frac{\tau}{|\xi|}\leq 2$ 时, 设 $\max\{a,b\}=a$, 得

$$\begin{aligned}I(\tau,\xi)&\approx|\xi|^{2-a-b}(\tau^2-|\xi|^2)^{\frac{n-3}{2}}[H^{1-b}_{\frac{n-3}{2}}(\lambda)+H^{1-a}_{\frac{n-3}{2}}(\lambda)]\\&\approx\tau^{n-1-a-b}\lambda^{\frac{n-3}{2}}H^{1-a}_{\frac{n-3}{2}}(\lambda).\end{aligned}$$

这样, 由 引理 3.7.2 函数 H 的性态由

$$(1-a)+\frac{n-3}{2}+1=\frac{n+1}{2}-a$$

的符号决定。

对于双曲球面 $\mathcal{H}(\tau,\xi)$ 上的积分我们证明下述类似的结论:

引理 3.7.3 . 如果我们考虑在时空区域 $|\tau|\leq|\xi|$ 中定义的积分

$$I(F)(\tau,\xi)=\int\delta(\tau-|\eta|+|\xi-\eta|)F(|\eta|,|\xi-\eta|)\mathrm{d}\eta,$$

则

$$\begin{aligned}&I(F)(\tau,\xi)\qquad(3.7.29)\\\simeq\ &(|\xi|^2-\tau^2)^{\frac{n-3}{2}}\int_1^\infty F(\frac{|\xi|x+\tau}{2},\frac{|\xi|x-\tau}{2})(|\xi|^2x^2-\tau^2)(x^2-1)^{\frac{n-3}{2}}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

证明 证明的步骤与 引理 3.7.1 一样, 我们仅注意到, 除了我们有限制 $\tau/|\xi|\leq a\leq 1$ 外, (3.7.24) 式不变。

求 (3.7.24) 的逆我们得到 $\eta\in\mathcal{H}(\tau,\xi)$ 时的极坐标表示

$$\rho=|\eta|=\frac{|\xi|^2-\tau^2}{2(-\tau+\xi\cdot w)}\geq\frac{|\xi|+\tau}{2}.$$

对 $\mathcal{H}(\tau,\xi)$ 情形的 命题 3.7.1 的类似物, 仅当我们限制双曲的 “椭圆” 部分的积分是可能的。更细致地, 如果 $\eta\in\mathcal{H}(\tau,\xi)$ 是在 $|\eta|<<|\xi|$ 的区域中, 则在 η 附近 $\mathcal{H}(\tau,\xi)$ 的几何与椭球面并没有太大的差异。

命题 3.7.2 设 $a,b\in\mathbb{R},|\tau|<|\xi|$。定义积分

$$I(\tau,\xi)=\int_{|\eta|+|\xi-\eta|\leq 2|\xi|}\frac{\delta(\tau-|\eta|+|\xi-\eta|)}{|\eta|^a|\xi-\eta|^b}\mathrm{d}\eta.$$

我们有下面的渐近性态: 在区域 $|\tau|\leq|\xi|/2$ 中,

$$I(\tau,\xi)\approx|\xi|^{n-1-a-b};\qquad(3.7.30)$$

而在区域 $|\xi|/2<\tau<|\xi|$ 中, 除 $b=\frac{n+1}{2}$ 外

$$I(\tau,\xi)\approx|\xi|^{n-1-a-b}(1-\frac{\tau}{|\xi|})^{n-1-\max\{b,\frac{n+1}{2}\}};\tag{3.7.31}$$

在 $b=\frac{n+1}{2}$ 时, 我们有

$$I(\tau,\xi)\approx\tau^{\frac{n-3}{2}-a}(1-\frac{\tau}{|\xi|})^{\frac{n-3}{2}}|\log(1-\frac{\tau}{|\xi|})|;\tag{3.7.32}$$

类似地, 在区域 $|\xi|/2<-\tau<|\xi|$ 中, 除 $a=\frac{n+1}{2}$ 外,

$$I(\tau,\xi)\approx|\xi|^{n-1-a-b}(1+\frac{\tau}{|\xi|})^{n-1-\max\{a,\frac{n+1}{2}\}},\tag{3.7.33}$$

在 $a=\frac{n+1}{2}$ 时,

$$I(\tau,\xi)\approx\tau^{\frac{n-3}{2}-b}(1+\frac{\tau}{|\xi|})^{\frac{n-3}{2}}|\log(1+\frac{\tau}{|\xi|})|.\tag{3.7.34}$$

证明 在引理 3.7.3 中令 $F(s,t)=s^{-a}t^{-b}$,

$$I(\tau,\xi)\simeq|\xi|^{2-a-b}(|\xi|^2-\tau^2)^{\frac{n-3}{2}}\int_1^2(x+\frac{\tau}{|\xi|})^{1-a}(x-\frac{\tau}{|\xi|})^{1-b}(x^2-1)^{\frac{n-3}{2}}\mathrm{d}x$$

设 $\tau\ge 0. t=x-1$, 利用

$$x+\frac{\tau}{|\xi|}\approx 1,\ x-\frac{\tau}{|\xi|}=(1-\frac{\tau}{|\xi|})+t,\ x^2-1\approx t,$$

我们得到

$$I(\tau,\xi)\approx|\xi|^{2-a-b}(|\xi|^2-\tau^2)^{\frac{n-3}{2}}H^{1-b}_{\frac{n-3}{2}}(1-\frac{\tau}{|\xi|}),$$

用引理 3.7.2 得证。

3.7.3 定理条件的必要性分析

设 $L>1$ 是一个大的正参数。如果 $\xi=(\xi_1,\cdots,\xi_n)\in\mathbb{R}^n$, 我们记

$$\xi'=(\xi_2,\cdots,\xi_n)\in\mathbb{R}^{n-1},\xi''=(\xi_3,\cdots,\xi_n)\in\mathbb{R}^{n-2},(\text{如果}n=2\text{则}\xi'=\xi_2,\xi''=\phi).$$

下面我们将通过一些例子来说明定理 3.7.1 中条件的必要性, 这些例子的基本思想是选取 $\mathbb{R}^n$ 中的适当的集 F 和 G, 取 $f=\chi_F$, $g=\chi_G$ 作为它们的特征函数, 然后将 (3.7.19) 中给出的 B_{++},B_{+-} 限制到使得指数部分本质上为常数的最大的 (t,x) 的集合中。

例 3.7.1 *((3.7.5) 的必要性)* 取 f,g 集中在沿同一方向同一频率范围, 我们通过检验 B_{++} 的有界性来验证 (3.7.3)。我们考虑函数 $B=B_{(++)}(\chi_F,\chi_G)$, 其中

$$F=\{\eta:L<\eta_1<2L,1<\eta_2<2,|\eta''|<1\},$$

和

$$G=\{\zeta:L<\zeta_1<2L,-2<\zeta_2<-1,|\zeta''|<1\}.$$

对于 $\eta\in F,\zeta\in G$, 设 θ 是 η 和 ζ 之间的交角, 则我们有

$$|\eta|\approx|\zeta|\approx|\eta+\zeta|\approx|\eta|+|\zeta|\approx L,\theta\approx L^{-1},$$

$$|\eta|+|\zeta|-|\eta+\zeta|\approx\frac{|\eta||\zeta|}{|\eta|+|\zeta|}\theta^2\approx L^{-1},$$

$$|\eta|-\eta_1\approx\frac{|\eta'|^2}{|\eta|}\approx L^{-1},\ |\zeta|-\zeta_1\approx\frac{|\zeta'|^2}{|\zeta|}\approx L^{-1},$$

$$\eta_1+\zeta_1\approx L,\ |\eta'+\zeta'|\lesssim 1.$$

从 (3.7.19) 我们有

$$B(t,x)=\int_F\int_G e^{i\phi_+(t,x;\eta,\zeta)}W_+(\eta,\zeta)\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta.$$

那么由 (3.7.21) 给出的权 W_+ 的阶是

$$W_+\approx\frac{L^{\beta_0}L^{\beta_+}L^{-\beta_-}}{L^{\alpha_1}L^{\alpha_2}}=L^{\beta_0+\beta_+-\beta_--\alpha_1-\alpha_2}=L^{-2\beta_--\frac{n-1}{2}}.$$

将位相函数 (3.7.20) 写成

$$\begin{aligned}\phi_+&=t(|\eta|+|\zeta|)+x\cdot(\eta+\zeta)\\&=t(|\eta|-\eta_1+|\zeta|-\zeta_1)+(t+x_1)(\eta_1+\zeta_1)+x'\cdot(\eta'+\zeta')\\&=tO(L^{-1})+(t+x_1)O(L)+x'O(1).\end{aligned}$$

这样, 我们可以在 $\mathbb{R}^{1+n}$ 中选择一个区域 R, 由条件

$$|t|\lesssim L,|t+x_1|\lesssim L^{-1},\ |x'|\lesssim 1,$$

定义, 使得当 $\eta\in F,\zeta\in G$ 以及 $(t,x)\in R$ 时 $|\phi_+|<\pi/3$, 由于这对 $|e^{i\phi_+}-1|<1/2$ 和 $\Re(e^{i\phi_+})\geq 1/2$, 我们可以忽略振荡因子。这样, 我们有, 当 $(t,x)\in R$ 时,

$$|B(t,x)|\geq\Re(B(t,x))\geq 1/2\int_F\int_G W_+(\eta,\zeta)\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta\gtrsim L^{-2\beta_--\frac{n-1}{2}}|F||G|,$$

因此,

$$\frac{\|B\|}{\|\chi_F\|\|\chi_G\|}\gtrsim L^{-2\beta_--\frac{n-1}{2}}|F|^{1/2}|G|^{1/2}|R|^{1/2}=L^{-2\beta_--\frac{n-1}{2}+1}.$$

令 $L\to\infty$, 我们得到所要求的 (3.7.5).

$$-2\beta_--\frac{n-1}{2}+1\leq 0.$$

例 3.7.2 *((3.7.7) 的必要性)* 我们仍然考察 $(++)$ 情形，但这时使其中的一个沿一个方向，而另一个保持不动。我们考虑 $B = B_{(++)}(\chi_F, \chi_G)$，其中 F 和 G 的定义如下:

$$F = \{\eta : L < \eta_1 < 2L,\ 1 < \eta_2 < 2,\ |\eta''| < 1\},$$

$$G = \{\zeta : 1 < \zeta_1 < 2,\ -2 < \zeta_2 < -1,\ |\zeta''| < 1\}.$$

取 $\eta \in F, \zeta \in G, \theta$ 是 η 和 ζ 之间的交角，则我们有

$$|\eta| \approx |\eta + \zeta| \approx |\eta| + |\zeta| \approx L,\ |\zeta| \approx 1,\ \theta \approx 1,$$

$$|\eta| + |\zeta| - |\eta + \zeta| \approx \frac{|\eta||\zeta|}{|\eta| + |\zeta|}\theta^2 \approx 1,$$

$$|\eta| - \eta_1 \approx \frac{|\eta'|^2}{|\eta|} \approx L^{-1},\ |\zeta| - \zeta_1 \approx \frac{|\zeta'|^2}{|\zeta|} \approx 1,$$

$$\eta_1 + \zeta_1 \approx L,\ |\eta' + \zeta'| \lesssim 1.$$

则权 W_+ 的阶是 $L^{\beta_0+\beta_+-\alpha_1} = L^{\alpha_2-\beta_--\frac{n-1}{2}}$。

$$\begin{aligned}
\phi_+ &= t(|\eta| + |\zeta|) + x \cdot (\eta + \zeta) \\
&= t(|\eta| - \eta_1 + |\zeta| - \zeta_1) + (t + x_1)(\eta_1 + \zeta_1) + x' \cdot (\eta' + \zeta') \\
&= tO(1) + (t + x_1)O(L) + x'O(1).
\end{aligned}$$

我们可以在 $\mathbb{R}^{1+n}$ 中选取一个区域 R，由

$$|t| \lesssim 1,\ |t + x_1| \lesssim L^{-1},\ |x'| \lesssim 1,$$

定义，在这上面，我们可以使振荡因子 $e^{i\phi_+}$ 接近于 1。这样

$$|B(t,x)| \gtrsim L^{\alpha_2-\beta_--\frac{n-1}{2}}|F||G|,\ (t,x) \in R.$$

因此，

$$\frac{\|B\|}{\|\chi_F\|\|\chi_G\|} \gtrsim L^{\alpha_2-\beta_--\frac{n-1}{2}}|F|^{1/2}|G|^{1/2}|R|^{1/2} \approx L^{\alpha_2-\beta_--\frac{n-1}{2}}.$$

令 $L \to \infty$，我们发现必要条件

$$\alpha_2 - \beta_- - \frac{n-1}{2} \leq 0.$$

类似地，交换 F 和 G 的角色，我们得

$$\alpha_1 - \beta_- - \frac{n-1}{2} \leq 0.$$

因此，得到必要条件 (3.7.7)。

例 3.7.3 *(对于 $\geq$ 的条件 (3.7.6))*. 继续考察 (++) 情形, 这时考虑相对支集的干扰。我们考虑函数 $B = B_{(++)}(\chi_F, \chi_G)$。其中 F 和 G 分别是中心在 $\eta^* = (L,1,0), \zeta^* = (-L,1,0)$ 半径为 1/4 的球。

取 $\eta \in F, \zeta \in G$, 我们有

$$|\eta| \approx |\zeta| \approx |\eta| + |\zeta| \approx L, \; |\eta + \zeta| \approx 1,$$

$$|\eta| + |\zeta| - |\eta + \zeta| \approx L,$$

$$|\eta| - |\eta^*| \lesssim 1, \; |\zeta| - |\zeta^*| \lesssim 1.$$

则权 W_+ 的阶为 $L^{\beta_+ + \beta_- - \alpha_1 - \alpha_2} = L^{-\beta_0 - \frac{n-1}{2}}$。

我们从位相函数中减去一个不依赖于 η 或 ζ 的项。

$$\begin{aligned} \phi_+ - t(|\eta^*| + |\zeta^*|) &= t(|\eta| - |\eta^*| + |\zeta| - |\zeta^*|) + x \cdot (\eta + \zeta) \\ &= tO(1) + xO(1). \end{aligned}$$

选取 $\mathbb{R}^{1+n}$ 中的区域 $R: |t| \lesssim 1, |x| \lesssim 1$。使得在其上振荡因子 $e^{i\phi_+ - t(|\eta^*|+|\zeta^*|)}$ 接近于 1，这样我们有

$$|B(t,x)| \gtrsim L^{-\beta_0 - \frac{n-1}{2}} |F||G|, \; (t,x) \in R,$$

$$\frac{\|B\|}{\|\chi_F\| \|\chi_G\|} \gtrsim L^{-\beta_0 - \frac{n-1}{2}} |F|^{1/2} |G|^{1/2} |R|^{1/2} \approx L^{-\beta_0 - \frac{n-1}{2}}.$$

令 $L \to \infty$ 得条件

$$-\beta_0 - \frac{n-1}{2} \leq 0,$$

这是 (3.7.6) 的最佳方式。

例 3.7.4 *((3.7.8) 的必要性)* 这时我们考察资料集中在相对方向的 (+−) 情形。考虑函数 $B = B_{(+-)}(\chi_F, \chi_G)$, 其中 F 和 G 分别是中心 $(L,1,0)$ 和 $(-L,1,0)$, 半径为 1/4 的球。

取 $\eta \in F, \zeta \in G, \theta$ 是 η 和 $-\zeta$ 之间的交角, 则我们有

$$|\eta| \approx |\zeta| \approx L, \; |\eta + \zeta| \approx 1, \; \theta \approx L^{-1},$$

$$|\eta + \zeta| - ||\eta| - |\zeta|| \approx \frac{|\eta||\zeta|}{|\eta + \zeta|} \theta^2 \approx 1,$$

$$|\eta| - \eta_1 \approx \frac{|\eta'|^2}{|\eta|} \approx L^{-1}, \; |\zeta| + \zeta_1 \approx \frac{|\zeta'|^2}{|\zeta|} \approx L^{-1},$$

$$\eta_1 + \zeta_1 \lesssim 1, \; |\eta' + \zeta'| \lesssim 1.$$

由 (3.7.22) 给出的权 W_- 的阶是 $L^{-\alpha_1 - \alpha_2}$。我们将相位函数写为

$$\begin{aligned} \phi_- &= t(|\eta| - |\zeta|) + x \cdot (\eta + \zeta) \\ &= t(|\eta| - \eta_1 - |\zeta| - \zeta_1) + (t + x_1)(\eta_1 + \zeta_1) + x' \cdot (\eta' + \zeta') \end{aligned}$$

$$= \quad tO(L^{-1}) + (t+x_1)O(1) + x'O(1).$$

在 $\mathbb{R}^{1+n}$ 中选取 $R: |t| \lesssim L, |t+x_1| \lesssim 1, |x'| \lesssim 1.$

在 R 上我们能控制位相 ϕ_-。这样

$$|B(t,x)| \gtrsim L^{-\alpha_1-\alpha_2}|F||G|,\ (t,x) \in R,$$

$$\frac{\|B\|}{\|\chi_F\|\|\chi_G\|} \gtrsim L^{-\alpha_1-\alpha_2}|F|^{1/2}|G|^{1/2}|R|^{1/2} = L^{-\alpha_1-\alpha_2+1/2}.$$

当 $L \to \infty$ 时得必要条件 (3.7.8),

$$-\alpha_1 - \alpha_2 + 1/2 \le 0.$$

例 3.7.5 *((3.7.9) 的必要性)* 设

$$\alpha_1 = \frac{n+1}{4}, \alpha_2 = \beta_0 + \beta_+, \beta_- = -\frac{n-3}{4}. \tag{3.7.35}$$

考虑 $B = \tilde{B}_{(++)}(f,g)$,

$$f(\xi) = \frac{\chi_E(\xi)}{|\xi|^{\frac{n+1}{4}}},\ g(\xi) = \chi_E(\xi),$$

E 是椭球 $\mathcal{E}(1+2\varepsilon^2,(1,0,\cdots,0))$ 的内部, 借助命题 *3.7.1* 我们计算 f 和 g 的范数。利用 $a = \frac{n+1}{2}, b = 0$ 时的 (3.7.28), 得

$$\begin{aligned}\int_E \frac{\mathrm{d}\eta}{|\eta|^{\frac{n+1}{2}}} &= \int_1^{1+2\varepsilon^2}\int \frac{\delta(\tau - |\eta| - |(1,0,\cdots,0)-\eta|)}{|\eta|^{\frac{n+1}{2}}}\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\tau \\ &\simeq \int_1^{1+2\varepsilon^2} (\tau-1)^{\frac{n-3}{2}}|\log(\tau-1)|\mathrm{d}\tau \approx \varepsilon^{n-1}|\log\varepsilon|;\end{aligned}$$

用 $a = b = 0$ 时的 (3.7.27) 得

$$\int_E \mathrm{d}\eta = \int_1^{1+2\varepsilon^2}\int \delta(\tau - |\eta| - |(1,0,\cdots,0)-\eta|)\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\tau \tag{3.7.36}$$

$$\approx \int_1^{1+2\varepsilon^2}(\tau-1)^{\frac{n-3}{2}}\mathrm{d}\tau \approx \varepsilon^{n-1}. \tag{3.7.37}$$

这样, 我们得到

$$\|g\| \simeq \varepsilon^{\frac{n-1}{2}},\ \|f\| \lesssim \varepsilon^{\frac{n-1}{2}}|\log\varepsilon|^{1/2}.$$

设 E' 是椭球 $\mathcal{E}(1+\varepsilon^2,(1,0,\cdots,0))$ 的内部, 考虑区域

$$D = \{(\tau,\xi) : \xi \in E', |\xi| > \varepsilon^2, \frac{\varepsilon^2}{2} < \tau - |\xi| < \varepsilon^2\}.$$

对于每个 $(\tau,\xi)\in D$ 我们有 $\mathcal{E}(\tau,\xi)\subset E$。事实上，如果 $\eta\in\mathcal{E}(\tau,\xi)$，则

$$\begin{aligned}|\eta|+|(1,0,\cdots,0)-\eta| &\le |\eta|+|\xi-\eta|+|(1,0,\cdots,0)-\xi|\\ &= (\tau-|\xi|)+(|\xi|+|(1,0,\cdots,0)-\xi|)\\ &< \varepsilon^2+(1+\varepsilon^2)=1+2\varepsilon^2.\end{aligned}$$

因此，当 $(\tau,\xi)\in D$ 时，有 $|\xi|\approx\tau\approx 1$:

$$B(\tau,\xi)\approx\tau^{\beta_0+\beta_+}(\tau-|\xi|)^{-\frac{n-3}{4}}\int\frac{\delta(\tau-|\eta|-|\xi-\eta|)}{|\eta|^{\frac{n+1}{2}}|\xi-\eta|^{\beta_0+\beta_+}}\mathrm{d}\eta.$$

现我们对于 $a=\frac{n+1}{2}\ge b=\beta_0+\beta_+$ 用 命题 *3.7.1*, 发现对于 $(\tau,\xi)\in D$ 有

$$B(\tau,\xi)\approx(\frac{\tau}{|\xi|}-1)^{\frac{n-3}{4}}|\log(\frac{\tau}{|\xi|}-1)|\approx\varepsilon^{\frac{n-3}{2}}|\log\varepsilon|.$$

通过类似于 (3.7.36) 的计算，得 D 的测度是 $\varepsilon^2\varepsilon^{n-1}$ 阶的，因此

$$\frac{\|B\|}{\|f\|\|g\|}\gtrsim\frac{\varepsilon^{\frac{n-3}{2}}|\log\varepsilon|\varepsilon^{\frac{n+1}{2}}}{\varepsilon^{\frac{n-1}{2}}\varepsilon^{\frac{n-1}{2}}|\log\varepsilon|^{1/2}}=|\log\varepsilon|^{1/2}.$$

当 $\varepsilon\to 0$ 时无界。

例 3.7.6 *((3.7.10) 的必要性).* 设

$$\alpha_1+\alpha_2=1/2,\ \beta_0+\beta_+=-\frac{n-1}{4},\ \beta_-=-\frac{n-3}{4}. \tag{3.7.38}$$

设 $B(\tau,\xi)=\tilde{B}_{(+-)}(f,g)(\tau,\xi), f=g=\sum_{k=-N}^{N}X_k$，其中，对于每个整数 k, X_k 是中心在 $(k,1,0,\cdots,0)$ 半径为 $1/4$ 的球 B_k 的特征函数。我们有 $\|f\|=\|g\|\approx N^{1/2}, \tilde{B}_{(+-)}(X_k,X_j)$ 的支集包含在中心为 $(k+j,2,0,\cdots,0)$，半径为 $1/2$ 的球中。在这样的不相交的球上求和，由正交性，我们有

$$\|B\|^2=\sum_{j,k,m}I(j,k,m),\ I(j,k,m)=\langle\tilde{B}_{(+-)}(X_k,X_{m-k}),\tilde{B}_{(+-)}(X_{m+j},X_{-j})\rangle, \tag{3.7.39}$$

其中求和指标满足条件

$$-N\le k,k-m,j,j+m\le N. \tag{3.7.40}$$

在 (3.7.39) 中每一项是正的，因此如果我们进一步限制到 (3.7.40) 的一个子集，得到一个下界。

让我们固定 (j,k,m) 来考察 $I(j,k,m)$，从 $\tilde{B}_{(+-)}$ 的定义知 $I(j,k,m)=$

$$\iiint_{\substack{\eta\in B_k\\ \xi-\eta\in B_{m-k}\\ \xi-\zeta\in B_{m+j}\\ \zeta\in B_{-j}}}\frac{\delta(|\eta|+|\zeta|-|\xi-\eta|-|\xi-\zeta|)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta}{|\xi|^{\frac{n-1}{2}}(|\xi|-||\eta|-|\xi-\eta||)^{\frac{n-3}{2}}|\eta|^{\alpha_1}|\xi-\eta|^{\alpha_2}|\xi-\zeta|^{\alpha_1}|\zeta|^{\alpha_2}}.$$

如果我们要求 $1<2m<j<k$, 则我们有下面的估计,

$$|\eta|\approx|\xi-\eta|\approx k,\ |\xi-\zeta|\approx|\zeta|\approx j,\ |\xi|\approx m,\ |\xi|-||\eta|-|\xi-\eta||\approx m^{-1}.$$

设 $B_{\varepsilon,k}$ 是中心在 $(k,1,0,\cdots,0)$, 半径为 ε 的球, 其中 ε 是待定的正常数, B_m^* 是中心在 $(m,2,0,\cdots,0)$, 半径为 $1/8$ 的球。如果 $\varepsilon<1/8$, 则

$$\eta\in B_{\varepsilon,k},\ \zeta\in B_{\varepsilon,-j},\ \xi\in B_m^*\Longrightarrow\eta\in B_k,\ \xi-\eta\in B_{m-k},\ \xi-\zeta\in B_{m+j},\ \zeta\in B_{-j},$$

我们得到下界

$$I(j,k,m)\gtrsim\frac{1}{mj^{1/2}k^{1/2}}\int\int\int_{\substack{\eta\in B_{\varepsilon,k}\\ \zeta\in B_{\varepsilon,-j}\\ \xi\in B_m^*}}\delta(|\eta|+|\zeta|-|\xi-\eta|-|\xi-\zeta|)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta.$$

利用 (3.7.15), 在我们的情形, $\phi(\xi)=|\eta|+|\zeta|-|\xi-\eta|-|\xi-\zeta|=0$。定义曲面 $\mathcal{E}(\eta,\zeta)$ 为焦点在 η 和 ζ 包含原点的椭球, 我们有

$$\begin{aligned}|\nabla\phi(\xi)| &= \left|\frac{\xi-\eta}{|\xi-\eta|}+\frac{\xi-\zeta}{|\xi-\zeta|}\right|\\ &\simeq \left(1+\frac{\xi-\eta}{|\xi-\eta|}\cdot\frac{\xi-\zeta}{|\xi-\zeta|}\right)^{1/2}\\ &\approx \xi-\eta\text{和}\zeta-\xi\text{之间的交角}\\ &\approx \frac{1}{j}+\frac{1}{k}\approx\frac{1}{j}.\end{aligned}$$

由 (3.7.15) 得

$$I(j,k,m)\gtrsim\frac{1}{m}\frac{j^{1/2}}{k^{1/2}}\int\int_{B_{\varepsilon,k}\times B_{\varepsilon,-j}}\left(\int_{\mathcal{E}(\eta,\zeta)\cap B_m^*}\mathrm{d}S_\xi\right)\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta.$$

利用下面的引理, 我们能固定 ε 和 λ, 对大的值 N, 我们有

$$\begin{aligned}\|\tilde{B}_{(+-)}(f,g)\|^2 &\geq \sum_{(j,k,m)\in J_{N,\lambda}}I(j,k,m)\\ &\geq \sum_{1/\lambda\leq j\leq N/4}j^{1/2}\sum_{N/2\leq k\leq N}k^{-1/2}\sum_{1\leq m\leq\lambda j}m^{-1}\\ &\geq N^{1/2}\sum_{1/\lambda\leq j\leq N/4}j^{1/2}\log(j)\\ &\geq N^2\log N.\end{aligned}$$

这说明

$$\frac{\|B_{(+-)}(f,g)\|}{\|f\|\|g\|}\gtrsim(\log N)^{1/2}.$$

当 $N\to\infty$ 时, 对于 (3.7.38) 中的选取估计无界。

引理 3.7.4 可以选取 $\varepsilon, \lambda \in (0, 1/2]$ 以及一个与 N 无关的常数 $C > 0$, 使得如果 $(j, k, m) \in J_{N,\lambda}$,

$$J_{N,\lambda} = \{(j, k, m) : 1/\lambda \le j \le N/4,\ N/2 \le k \le N,\ 1 \le m \le \lambda j\} \tag{3.7.41}$$

以及 $\eta \in B_{\varepsilon,k}, \zeta \in B_{\varepsilon,-j}$, 则椭球 $\mathcal{E}(\eta, \zeta)$ 与 B_m^* 的交集的面积大于 C:

$$\inf_{\substack{(j,k,m)\in J_{N,\lambda} \\ \eta\in B_{\varepsilon,k} \\ \zeta\in B_{\varepsilon,-j}}} \int_{\mathcal{E}(\eta,\xi)\cap B_m^*} \mathrm{d}S_\xi \ge C > 0.$$

证明 设 $(j, k, m) \in J_{N,\lambda}, \eta \in B_{\varepsilon,k}, \zeta \in B_{\varepsilon,-j}$。为证引理, 只要说明, 对于 ε 和 λ 充分小, 椭球 $\mathcal{E}(\eta, \zeta)$ 与中心在 $(m, 2, 0, \cdots, 0)$, 半径为 1/6 的球相交。

首先, 证明 $\eta = (k, 1, 0, \cdots, 0), \zeta = (-j, 1, 0, \cdots, 0)$ 时的情形, 由于 $1 < 2m < j < k$, 有 $(m, 2, 0, \cdots, 0) \in \mathcal{E}_0 = \mathcal{E}(\eta, \zeta)$. 在点 $(0, 2, 0, \cdots, 0)$ 切于 $\mathcal{E}_0$ 的平面与 ξ_1 方面有一个角度 $\alpha \approx 1/j$, 因此, 对某个正常数 λ, 如果 $m/j \le \lambda$, 它与中心在 $(m, 2, 0, \cdots, 0)$ 半径为 1/32 的球相交。这样, B_m^* 也包含在 $\mathcal{E}_0$ 外面的点, 这必与 $\mathcal{E}_0$ 相交。

然后, 说明 $\eta = (k, 1, 0, \cdots, 0) + O(\varepsilon)$ 和 $\zeta = (-j, 1, 0, \cdots, 0) + O(\varepsilon)$ 的情形, $\mathcal{E}_0$ 的每个点离 $\mathcal{E}(\eta, \zeta)$ 的距离至多是 ε 阶的, 我们能选取 ε 充分小, 使得它比 1/32 小.

例 3.7.7 *((3.7.6) 中的等式情形 (3.7.3) 不成立)*. 设

$$\beta_0 = -\frac{n-1}{2}, \beta_+ + \beta_- = \alpha_1 + \alpha_2.$$

设 $B(\tau, \xi) = \tilde{B}_{(++)}(\chi_F, \chi_G)(\tau, \xi)$, 其中 F 和 G 是集

$$F = \{\eta : |\eta_1 - 1| < \varepsilon^2, |\eta'| < \varepsilon\},$$

$$G = \{\zeta : |\zeta_1 + 1| < 2\varepsilon^2, |\zeta'| < 2\varepsilon\}.$$

其中 ε 是一个小的正参数, 我们有 $\|\chi_F\| = |F|^{1/2} \approx \varepsilon^{\frac{n+1}{2}}, \|\chi_G\| = |G|^{1/2} \approx \varepsilon^{\frac{n+1}{2}}$。条件 $\eta \in F, \xi - \eta \in G$ 和 $\eta \in \mathcal{E}(\tau, \xi)$ 意味着

$$|\eta| \approx |\xi - \eta| \approx \tau \approx \tau - |\xi| \approx 1, |\xi| \lesssim \varepsilon,$$

特别我们有

$$B(\tau, \xi) \approx |\xi|^{-\frac{n-1}{2}} \int_{\substack{\eta\in F \\ \xi-\eta\in G}} \delta(\tau - |\eta| - |\xi - \eta|)\mathrm{d}\eta.$$

B 的支集包含 D:

$$D = \{(\tau, \xi) : |\xi_1| << \varepsilon^2,\ |\xi'| << \varepsilon,\ |\tau - 2| << \varepsilon^2\}.$$

如果 $(\tau, \xi) \in D, \eta \in \mathcal{E}(\tau, \xi) \cap F$, 则 $\zeta = \xi - \eta \in G$, 这是因为

$$|\zeta_1 + 1| \le |\xi_1| + |-\eta_1 + 1| < 2\varepsilon^2,\ |\zeta'| \le |\xi'| + |\eta'| < 2\varepsilon.$$

因此当 $(\tau,\xi)\in D$ 时, 我们有

$$\begin{aligned} B(\tau,\xi) &\approx |\xi|^{-\frac{n-1}{2}}\int_{\eta\in F}\delta(\tau-|\eta|-|\xi-\eta|)\mathrm{d}\eta \\ &= |\xi|^{-\frac{n-1}{2}}\int_{\mathcal{E}(\tau,\xi)\cap F}\frac{\mathrm{d}S_\eta}{|\nabla_\eta(|\eta|+|\xi-\eta|)|}. \end{aligned}$$

注意到

$$|\nabla_\eta(|\eta|+|\xi-\eta|)|=|\frac{\eta}{|\eta|}-\frac{\xi-\eta}{|\xi-\eta|}|\approx \eta\text{和}\xi-\eta\text{之间的交角}\approx 1.$$

$|\mathcal{E}(\tau,\xi)\cap F|\approx\varepsilon^{n-1}$, 事实上, 条件 $(\tau,\xi)\in D,\eta\in\mathcal{E}(\tau,\xi)$ 和 $|\eta'|<<\varepsilon$ 意味着 $\eta\in F$, 由于我们有

$$|\eta|-\eta_1<<\varepsilon^2,\ |\xi-\eta|-\eta_1<<\varepsilon^2,\ ||\eta|+|\xi-\eta|-2|<<\varepsilon^2$$

$$\Longrightarrow |2(\eta_1-1)|<<\varepsilon^2.$$

对于 $(\tau,\xi)\in D$, 我们有

$$B(\tau,\xi)\gtrsim|\xi|^{-\frac{n-1}{2}}\varepsilon^{n-1},$$

$$\|B\|^2\gtrsim\varepsilon^{2(n-1)}\int\int_D\frac{\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau}{|\xi|^{n-1}}\gtrsim\varepsilon^{2(n-1)}\int_{2-\varepsilon^2}^{2+\varepsilon^2}\int_0^{\varepsilon^2}\int_{|\xi'|<<\varepsilon}\frac{\mathrm{d}\xi'}{(|\xi'|+\xi_1)^{n-1}}\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\tau.$$

由引理 *3.7.2*,

$$\begin{aligned} \int_{|\xi'|<<\varepsilon}\frac{\mathrm{d}\xi'}{(|\xi'|+\xi_1)^{n-1}} &\simeq \int_0^\varepsilon\frac{\gamma^{n-2}\mathrm{d}\gamma}{(\gamma+\xi_1)^{n-1}}=\int_0^1\frac{t^{n-2}\mathrm{d}t}{(t+\frac{\xi_1}{\varepsilon})^{n-1}} \\ &= H_{n-2}^{1-n}(\frac{\xi_1}{\varepsilon})\approx|\log(\frac{\xi_1}{\varepsilon})|. \end{aligned}$$

因此, 如果 ε 小, 我们有

$$\|B\|^2\gtrsim\varepsilon^{2(n-1)}\varepsilon^2\int_0^{\varepsilon^2}|\log(\frac{\xi_1}{\varepsilon})|\mathrm{d}\xi_1\approx\varepsilon^{2(n+1)}|\log\varepsilon|.$$

最后得

$$\frac{\|B\|}{\|\chi_F\|\|\chi_G\|}\gtrsim\frac{\varepsilon^{n+1}|\log\varepsilon|^{\frac12}}{\varepsilon^{\frac{n+1}{2}}\varepsilon^{\frac{n+1}{2}}}=|\log\varepsilon|^{\frac12}.$$

当 $\varepsilon\to0$ 时发散。

§3.8 波 Sobolev 空间及其估计

注意到齐次波动方程解的时空 Fourier 变换 $\tilde{u}$ 的支集为 $\{(\tau,\xi):\tau^2-|\xi|^2=0\}$。如果我们将解关于时间作局部化 $\eta(t)u$，由不确定性原理，其时空 Fourier 变换 $\widetilde{\eta u}$ 集中在区域 $\{(\tau,\xi):\tau^2=|\xi|^2+O(1)\}$。如果对方程作非线性扰动，初看起来似乎非线性使得 $\tilde{u}$ 或 $\widetilde{\eta u}$ 的支集发生了扭曲，或会有离开锥面 $\tau^2-|\xi|^2=0$ 的部分出现。然而如果我们仅在短时间内考查，对许多的非线性方程的解来说，$\widetilde{\eta u}$ 仍然集中在其特征锥面附近，这就是算子 $\Box$ 的色散性效果所起的作用。这一节我们将以这种角度来作出分析，引入波 Sobolev 空间 $H^{s,b}$，这样的空间也可以认为是二次微局部 Sobolev 空间。在第一章中，我们曾提到过这样的空间对色散和波动方程所处的地位与 Sobolev 空间对椭圆型方程所处的地位是一样的。s 和 b 分别度量解的“椭圆”和“色散”正则性。我们希望这样的空间能完全捕捉 D'Alembert 算子的正则性效果。

设 $s,b\in\mathbb{R}$，定义 $H^{s,b}=\{u\in\mathcal{S}':\|u\|_{H^{s,b}}<\infty\}$，其中

$$\|u\|_{H^{s,b}}^2=\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^n}\langle\xi\rangle^{2s}\langle|\tau|-|\xi|\rangle^{2b}|\tilde{u}(\tau,\xi)|^2\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau. \tag{3.8.1}$$

显然，这个空间的范数关于时空的平移是不变的。它还有如下的基本性质：

1. 对于 $s\in\mathbb{R}$, $b>1/2$, $T>0$, $H^{s,b}$ 可以连续地嵌入到 $C([0,T];H^s(\mathbb{R}^n))$。

事实上，只要注意到

$$\hat{u}(t,\xi)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{it\tau}\tilde{u}(\tau,\xi)\mathrm{d}\tau,$$

对于 $b>1/2$，应用 Cauchy 不等式我们可得

$$\langle\xi\rangle^{2s}|\hat{u}(t,\cdot)|^2\le C\int_{-\infty}^{\infty}\langle\xi\rangle^{2s}\langle|\tau|-|\xi|\rangle^{2b}|\tilde{u}(\tau,\xi)|^2\mathrm{d}\tau$$

成立，然后对 ξ 积分即可。

2. 对于任何 $\phi(t)\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$, $u\in H^{s,b}$，则 $\phi u\in H^{s,b}$。即关于时间的局部化是 $H^{s,b}$ 上的一个有界算子。更进一步我们还有：

$$\|\phi(t/\lambda)u\|_{H^{s,b}}\le C\|u\|_{H^{s,b}}, \tag{3.8.2}$$

其中 $C>0$ 是与 $\lambda>1,s,b$ 无关的常数。

事实上，令 $\phi_\lambda(t)=\phi(t/\lambda)$，则 $\hat{\phi_\lambda}(\tau)=\lambda\hat{\phi}(\tau\lambda)$。注意到

$$||\tau|-|\xi||\le||\tau|-|\tau_1|+|\tau_1|-|\xi||\le|\tau-\tau_1|+||\tau_1|-|\xi||,$$

于是

$$\langle|\tau|-|\xi|\rangle^b\le\langle\tau-\tau_1\rangle^{|b|}\langle|\tau_1|-|\xi|\rangle^b.$$

再注意到

$$\widetilde{\phi_\lambda u}(\tau,\xi)=C\int_{-\infty}^{\infty}\hat{\phi_\lambda}(\tau-\tau_1)\tilde{u}(\tau_1,\xi)\mathrm{d}\tau_1,$$

我们有

$$\begin{aligned}\|\phi_\lambda u\|_{H^{s,b}} &= C\|\langle\xi\rangle^s\langle|\tau|-|\xi|\rangle^b\int_{-\infty}^{\infty}\hat{\phi_\lambda}(\tau-\tau_1)\tilde{u}(\tau_1,\xi)\mathrm{d}\tau_1\|_{L^2_{\tau,\xi}}\\ &\le \|\int_{-\infty}^{\infty}\langle\tau-\tau_1\rangle^{|b|}\hat{\phi_\lambda}(\tau-\tau_1)\langle\xi\rangle^s\langle|\tau_1|-|\xi|\rangle^b\tilde{u}(\tau_1,\xi)\mathrm{d}\tau_1\|_{L^2_{\tau,\xi}}\\ &\le \|\langle\tau\rangle^{|b|}\hat{\phi_\lambda}(\tau)\|_{L^1_\tau}\|u\|_{H^{s,b}}.\end{aligned}$$

而如果 $\lambda\ge 1$ 并且 $N-|b|>1$，我们有

$$\|\langle\tau\rangle^{|b|}\hat{\phi_\lambda}(\tau)\|_{L^1_\tau}\le\int\langle\tau\rangle^{|b|}\lambda\langle\lambda\tau\rangle^{-N}\mathrm{d}\tau\le\int\langle\tau\rangle^{|b|-N}\mathrm{d}\tau\le 1.$$

3. 原则上，对于具 H^s 初值的齐次波方程解成立的线性或多线性时空估计，对应于波 Sobolev 空间 $H^{s,b}$ 也有类似的估计。例如，对于适当的 q，r，s，我们有如下的 Strichartz 估计

$$\|e^{it\mathrm{D}}f(x)\|_{L^q_tL^r_x}\le\|f\|_{H^s_x},\tag{3.8.3}$$

于是如果 $b>1/2$，则对于同样的 q，r，s，我们有相应的估计成立

$$\|u\|_{L^q_tL^r_x}\le\|u\|_{H^{s,b}}.\tag{3.8.4}$$

注意到对于任何 $u\in H^{s,b}$，我们可以将其分解为 $u=u_++u_-$，其中

$$\mathrm{supp}\tilde{u}_\pm(\tau,\xi)\subset\{\pm\tau\ge 0\}.$$

对于这样的分解，我们有

$$\|u\|_{H^{s,b}}\simeq\|u_+\|_{H^{s,b}}+\|u_-\|_{H^{s,b}}.$$

由对称性，我们仅需对于 u_+ 来证明估计 (3.8.4)。

注意到 $\tilde{u}(\tau+|\xi|,\xi)=e^{-it\mathrm{D}}u(\tau,\xi)$，我们有

$$\|u_+\|_{H^{s,b}}=\|\langle\xi\rangle^s\langle\tau-|\xi|\rangle^b\tilde{u}_+(\tau,\xi)\|_{L^2_{\tau,\xi}}=\|\langle\xi\rangle^s\langle\tau\rangle^b\tilde{u}_+(\tau+|\xi|,\xi)\|_{L^2_{\tau,\xi}}.$$

如果我们令

$$f(\lambda,x):=\mathcal{F}_\xi^{-1}\left(\langle\lambda\rangle^b\tilde{u}_+(\lambda+|\xi|,\xi)\right),$$

则可以得到

$$u_+(t,x)=\frac{1}{2\pi}\int e^{it\lambda}\langle\lambda\rangle^{-b}e^{it\mathrm{D}}f(\lambda,x)\mathrm{d}\lambda,\tag{3.8.5}$$

并且

$$\|u_+\|_{H^{s,b}}=\|f\|_{L^2_\lambda H^s_x}.$$

于是如果 $b>1/2$，对 (3.8.5) 应用估计 (3.8.3)，我们就可以得到

$$\|u_+\|_{L^q_tL^r_x}\le\|f\|_{L^2_\lambda H^s_x}\le\|u_+\|_{H^{s,b}}.$$

考虑齐次波动方程的 Cauchy 问题

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0, \\ u(0,x) = u_0, \partial_t u(0,x) = u_1. \end{cases} \tag{3.8.6}$$

我们知道其经典解的能量估计为 $\|u(t,\cdot)\|_{H^s} \le C(\|u_0\|_{H^s} + \|u_1\|_{H^{s-1}})$, 其中 $0 \le t \le T_0$, $C > 0$。由此我们就可以证明对于 $(u_0, u_1) \in H^s \times H^{s-1}$, $s \in \mathbb{R}$, $T_0 > 0$, 存在解 $u \in C([0,T_0]; H^s)$。我们要证明通过适当地局部化, 这样的解属于 $H^{s,b}$。

定理 3.8.1 设 $s, b \in \mathbb{R}$, $\phi(t) \in \mathcal{S}$, 如果 $(u_0, u_1) \in H^s \times H^{s-1}$, 则对于方程 (3.8.6) 的解 u 有如下不等式

$$\|\phi(t)u(t,x)\|_{H^{s,b}} + \|\phi(t)\partial_t u(t,x)\|_{H^{s-1,b}} \le \|u_0\|_{H^s} + \|u_1\|_{H^{s-1}}. \tag{3.8.7}$$

证明 由线性方程解的表达式

$$u = \cos(t\mathrm{D})u_0 + \mathrm{D}^{-1}\sin(t\mathrm{D})u_1,$$

我们仅需证明如下两个估计

$$\|\phi(t)e^{\pm it\mathrm{D}}f(x)\|_{H^{s,b}} \le \|f\|_{H_x^s}, \tag{3.8.8}$$

$$\|\phi(t)\mathrm{D}^{-1}\sin(t\mathrm{D})f(x)\|_{H^{s,b}} \le \|f\|_{H_x^{s-1}}. \tag{3.8.9}$$

对于估计 (3.8.8), 注意到

$$\mathcal{F}(\phi(t)e^{\pm it\mathrm{D}}f(x))(\tau,\xi) = C\hat{\phi}(\tau \mp |\xi|)\hat{f}(\xi),$$

并且 $||\tau| - |\xi|| \le |\tau - |\xi||$, 这样, 由 $\hat{\phi}$ 的速降性,

$$\|\phi(t)e^{\pm it\mathrm{D}}f(x)\|_{H^{s,b}} = C\|\langle\xi\rangle^s\langle|\tau| - |\xi|\rangle^b\hat{\phi}(\tau \mp |\xi|)\hat{f}(\xi)\|_{L^2_{\tau,\xi}} \le \|f\|_{H_x^s}.$$

现在我们来看估计 (3.8.9), 当 $\mathrm{supp}\hat{f} \subset \{\xi||\xi| \ge 1\}$ 时, 该估计归结为 (3.8.8)。现在我们假设 $\mathrm{supp}\hat{f} \subset \{\xi||\xi| \le 1\}$, 于是

$$\begin{aligned} \|\phi(t)\mathrm{D}^{-1}\sin(t\mathrm{D})f(x)\|_{H^{s,b}} &\simeq \|\phi(t)\mathrm{D}^{-1}\sin(t\mathrm{D})f(x)\|_{H^{0,b}} \\ &\le \|\phi(t)|\xi|^{-1}\sin(t|\xi|)\hat{f}(\xi)\|_{L_\xi^2 H_t^b} \\ &\le \|f\|_{L^2} \simeq \|f\|_{H_x^{s-1}}. \end{aligned}$$

对于非齐次情形

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = F, \\ u(0,x) = u_t(0,x) = 0, \end{cases} \tag{3.8.10}$$

其中 $F \in H^{s-1,b-1}$, $\mathrm{supp}_t F \subseteq [-1,1]$, $s \in \mathbb{R}$, $b > 1/2$。我们有如下性质

定理 3.8.2 设 $s \in \mathbb{R}$, $b > 1/2$, $\phi(t) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, 则对问题 (3.8.10), 我们有

$$\|\phi(t)u(t,x)\|_{H^{s,b}} + \|\phi(t)\partial_t u(t,x)\|_{H^{s-1,b}} \le \|F\|_{H^{s-1,b-1}}. \tag{3.8.11}$$

证明 首先我们断言

$$\|\phi(t)\int_{-\infty}^{t} e^{i(t-r)\mathrm{D}}F(r)\mathrm{d}r\|_{H^{s-1,b}} \le \|F\|_{H^{s-1,b-1}}. \tag{3.8.12}$$

令

$$v(t,x) = \int_{-\infty}^{t} \mathrm{D}^{-1}\sin((t-r)\mathrm{D})F(r)\mathrm{d}r,\ w = v - u,$$

于是由 (3.8.12)，我们有

$$\|\partial v(0)\|_{H^{s-1}} \le \|\phi(t)\partial v\|_{H^{s-1,b}} \le \|F\|_{H^{s-1,b-1}},$$

并且 $\Box v = F$。当 $\mathrm{supp}\hat{f} \subset \{\xi||\xi| \ge 1\}$ 时，由 (3.8.12),

$$\|\phi(t)v\|_{H^{s,b}} \le \|\mathrm{D}^{-1}F\|_{H^{s,b-1}} \simeq \|F\|_{H^{s-1,b-1}},$$

而当 $\mathrm{supp}\hat{f} \subset \{\xi||\xi| \le 1\}$ 时，注意到由 F 的支集性质，$v(-2) = 0$,

$$\begin{aligned}
\|\phi(t)v\|_{H^{s,b}} &\le \|\phi(t)\int_{-\infty}^{t} |\xi|^{-1}\sin((t-r)|\xi|)\hat{F}(r,\xi)\mathrm{d}r\|_{L^2_\xi H^b_t} \\
&\le \sum_{k=0}^{b+1} \|\phi^{(k)}(t)v(t)\|_{L^2_{t,x}} + \|\phi(t)\partial_t v(t)\|_{H^{0,b}} \\
&\le \|\tilde{\phi}(t)\partial_t v(t)\|_{H^{0,0}} + \|\phi(t)\partial_t v(t)\|_{H^{0,b}} \\
&\le \|F\|_{H^{0,b-1}} \le \|F\|_{H^{s-1,b-1}},
\end{aligned}$$

所以估计 (3.8.11) 对于 v 成立。对于 w，注意到其满足方程 $\Box w = 0$ 并以 $(v(0), \partial_t v(0)) \in H^s \times H^{s-1}$ 为初值，于是由定理 3.8.1 我们知道估计 (3.8.11) 对于 w 成立。由此我们将不等式的证明归结到了断言 (3.8.11) 的证明。

现在我们来证明该断言。不失一般性，我们不妨假设 $s = 1$。令

$$G(t,x) = \int_{-\infty}^{t} e^{i(t-r)\mathrm{D}}F(r)\mathrm{d}r.$$

对于 G，注意到 $G(-2,x) = 0$，取一个在 $[-3,3]$ 上取值为 1 的光滑紧支辅助函数 ψ，我们有

$$\begin{aligned}
\phi(t)G(t) &= \phi(t)\int_{-\infty}^{t} e^{i(t-r)\mathrm{D}}F(r)\mathrm{d}r \\
&= \phi(t)\int_{\mathbb{R}} \psi(t-r)1_{\mathbb{R}_+}(t-r)e^{i(t-r)\mathrm{D}}F(r)\mathrm{d}r := \phi(t)B(t,x)
\end{aligned}$$

由 (3.8.2)，我们只需证明如下断言

$$\|B\|_{H^{0,b}} \le \|F\|_{H^{0,b-1}}. \tag{3.8.13}$$

注意到 $B(t,x) = \left(\psi(t)1_{\mathbb{R}_+}(t)e^{it\mathrm{D}}\right) *_t F$，我们有

$$\tilde{B}(\tau,\xi) = \mathcal{F}\left(\psi(t)1_{\mathbb{R}_+}(t)e^{it|\xi|}\right)(\tau)\tilde{F}(\tau,\xi),$$

而由分部积分，我们知道

$$\mathcal{F}\left(\psi(t)1_{\mathbb{R}_+}(t)e^{it|\xi|}\right)(\tau) \le \langle\tau - |\xi|\rangle^{-1} \le \langle|\tau| - |\xi|\rangle^{-1},$$

由此，断言 (3.8.13) 得证，定理证毕。

第四章　非线性波动方程局部解

本章我们主要讨论非线性波动方程 Cauchy 问题的解关于时间的局部适定性问题。先讨论基于 L^2 型 Sobolev 空间框架的局部适定性，然后讨论基于可微函数空间的局部理论，最后我们说明当非线性项满足结构性条件，即零条件时，局部适定性理论的正则性要求可以降低。对于局部存在性，对初值的正则性要求可以比较弱，如果我们要将局部解延拓至更大的时间区间或整体解，对初值的正则性以及非线性项的增长性和结构的要求就会更高。讨论非线性问题的局部存在性的一个基本方法是我们在第一章中所介绍的 Banach 空间中的压缩映照不动点原理。

§4.1　半线性波动方程的局部解

我们考虑 $\mathbb{R}^{1+n}$ 中形如

$$\Box u = F(t,x,J_1 u),\ u(0,x) = u_0, \partial_t u(0,x) = u_1 \tag{4.1.1}$$

的一般形式的波动方程，其中 $J_1(u) = (u, \partial u), \partial u = (\partial_t u, \partial_x u), F(t,x,0) = 0$。对于方程 (4.1.1), 从第三章的能量不等式, $u(t) = u(0) + \int_0^t \partial_t u(\tau)\mathrm{d}\tau$, 以及 $(1-\Delta_x)^{-s/2}$ 与 J_1 和 $\Box$ 的可换性，我们立刻有在时刻 t 关于初值及非线性项 F 的高阶估计

$$\|J_1 u(t)\|_{H^s} \le (1+t)\left(\|J_1 u(0)\|_{H^s} + \int_0^t \|F(\tau,\cdot,J_1 u(\tau))\|_{H^s}\mathrm{d}\tau\right). \tag{4.1.2}$$

从 (4.1.2) 我们可以看出，如果能用 $\|J_1 u(t)\|_{H^s}$ 来控制 $\|F(\tau,\cdot,J_1 u(\tau))\|_{H^s}$, 我们就能用众所周知的 Gronwall 不等式得到 $\|J_1 u(t)\|_{H^s}$ 的界，这里的 Sobolev 空间 H^s 均指整数阶的。而这样的控制正是第二章中的 Moser 估计。

为建立局部适定性理论，我们先引入一些概念。

定义 4.1.1 *我们称 Cauchy 问题 (4.1.1) 在 H^s 中是适定的，如果对所有给定的 $K>0$, 存在 $T>0$ 使得对所有满足 $\|u_0\|_{H^s} + \|u_1\|_{H^{s-1}} \le K$ 的初值, (4.1.1) 存在唯一的解*

$$u \in C^0([0,T];H^s) \cap C^1([0,T];H^{s-1}),$$

且解对初值满足连续依赖性。

注意到存在时间 T 依赖于初值的 $H^s \times H^{s-1}$ 范数的大小 K, 并不依赖于初值本身。所以这样的解可以延拓至一个最大存在时间 T^*。从下面的定理可以看出解保持初值的正则性直到破裂发生。

定理 4.1.1 设方程 (4.1.1) 中的 $F(t,x,J_1u)\in C^\infty(\mathbb{R}^{1+n}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{1+n})$，对所有的 $\alpha\in\mathbb{N}^{2n+3}$, $\|\partial^\alpha F(t,\cdot,p)\|_{L^\infty}<\infty$。则 Cauchy 问题 (4.1.1) 在 H^{s+1} 中是适定的，其中 $s\geq[n/2]+1$。解的破裂时间 $T^*_{s+1}=T^*_{[n/2]+2}=\sup\{T:\|J_1u(t)\|_{L^\infty}<\infty,0\leq t\leq T\}$. 此外，$u$ 在最大存在区间 $[0,T^*_{[\frac{n}{2}]+2})$ 上是唯一的。

证明 设 $\mathcal{L}$ 是一个映给定函数 u 到非齐次 Cauchy 问题解的非线性解算子，它由线性波动方程

$$\Box\mathcal{L}u=F(t,x,J_1u),\ J_1\mathcal{L}u(0)=(u_0,u_1,\nabla u_0)$$

定义。显然，$\mathcal{L}$ 的不动点即是问题的解。

我们用压缩映照原理证明不动点的存在性。注意到非线性项 $F(t,x,J_1u)$ 的特点，我们希望能在 $\|J_1u\|_{L^\infty}\leq M$ 的前提下通过 Moser 型估计及不等式 (4.1.2) 能控制 $\|J_1\mathcal{L}u(t)\|_{H^s}$ 以及关于时间的增长。所以我们的 Banach 空间应该满足如下的要求，即

$$\mathbf{B}_s(T)=\{u\in\mathcal{D}':\sup_{0\leq\tau\leq T}\|J_1u(\tau)\|_{H^s}<\infty\}.$$

我们断言：能选取与初值的 $H^{s+1}\times H^s$ 的大小 K 有关的 R 和 T, 使得 $\mathcal{L}$ 映半径为 R 的球 $B_R\subset\mathbf{B}_s(T)$ 到自身。事实上，可取 $R=4K,T=(4C)^{-1}$. 对于 $0\leq t\leq T\leq 1$, 由 $\mathcal{L}J_1u(0)=J_1u(0)$ 以及 Moser 不等式，我们有

$$\begin{aligned}
&\|J_1\mathcal{L}u(t)\|_{H^s}\\
\leq\ &2\|J_1\mathcal{L}u(0)\|_{H^s}+2\int_0^t\|F(\tau,\cdot,J_1u(\tau))\|_{H^s}\mathrm{d}\tau\\
\leq\ &2\|J_1\mathcal{L}u(0)\|_{H^s}+2\int_0^t C\sum_{1\leq|\alpha|\leq s}\|\partial^\alpha F(\tau,\cdot,J_1u(\tau))\|_{L^\infty}\|J_1u(\tau)\|_{H^s}\mathrm{d}\tau\\
\leq\ &2\|J_1u(0)\|_{H^s}+2\sup_{0\leq\tau\leq t}\|J_1u(\tau)\|_{H^s}\int_0^t C\sum_{1\leq|\alpha|\leq s}\|(\partial^\alpha F)(\tau,\cdot,J_1u(\tau))\|_{L^\infty}\mathrm{d}\tau.
\end{aligned}$$

由 Sobolev 不等式和 $\mathbf{B}_s$ 的定义知 $\|J_1u\|_{L^\infty_x}$ 关于时间是一致有界的。再由定理关于 $\partial^\alpha F$ 的假设条件, 我们可令一新的常数 $C=C\sum_{1\leq|\alpha|\leq s}\|(\partial^\alpha F)(\tau,\cdot,J_1u(\tau))\|_{L^\infty}$。这样

$$\|J_1\mathcal{L}u(t)\|_{H^s}\leq 2\|J_1\mathcal{L}u(0)\|_{H^s}+2\sup_{0\leq\tau\leq t}\|J_1u(\tau)\|_{H^s}\int_0^t C\mathrm{d}\tau.$$

注意到 C 仅依赖于 K 和 F, 取 $R=4K$, $T=(4C)^{-1}$ 使得对所有的 $t\leq T$, $\int_0^t C\mathrm{d}\tau\leq\frac{1}{4}$, 这样我们得到了 $\sup_{0\leq\tau\leq T}\|J_1\mathcal{L}u(\tau)\|_{H^s}\leq R$, 即 $\mathcal{L}$ 是到自身的映射。

下面我们说明压缩性。由 Taylor 展开，对于 $s\geq[\frac{n}{2}]+2$, 我们有

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{L}u-\mathcal{L}v\|_{\mathbf{B}_s}\ &\leq\ 2\int_0^T\|F(t,\cdot,J_1u(t))-F(t,\cdot,J_1v(t))\|_{H^s}\mathrm{d}t\\
&\leq\ 2\int_0^T\|\,(A(t,\cdot,J_1u(t),J_1v(t))(J_1u(t)-J_1v(t))\,\|_{H^s}\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq C\int_0^T \|A(t,\cdot,J_1u(t),J_1v(t))\|_{H^s}\|J_1u(t)-J_1v(t)\|_{H^s}\mathrm{d}t\\
&\leq C\int_0^T \|J_1u(t)-J_1v(t)\|_{H^s}\mathrm{d}t\\
&\leq CT\|u-v\|_{\mathbf{B}_s},
\end{aligned}
$$

其中的 A 是其变量的光滑函数。易知 A 的 H^s 范数在初值 K 球上是一致有界的。选取 $T=C^{-1}\lambda, 0<\lambda<1$, 得到 $\mathcal{L}$ 是 $B_R\subset \mathbf{B_s}(T)$ 上的一个压缩映照。

设 $0<T<T^*_{[n/2]+2}$, 考虑 $[0,T]$ 上的一个解 u 满足 $\|J_1u(t)\|_{H^{[n/2]+1}}<\infty$. 由 Sobolev 不等式有 $\|J_1u(t)\|_{L^\infty}\leq M$. 这样我们能用连续性的讨论以及 Gronwall 不等式得 $\|J_1u(t)\|_{H^s}$ 在 $[0,T]$ 上仍然有界。由于 T 是任意的，我们有 $T^*_{s+1}\geq T^*_{[n/2]+2}$. 相反的估计来自于定义。

设 u,v 是两个解，注意到

$$
\begin{aligned}
&\|J_1(u-v)(t)\|_{H^{[n/2]+1}}\\
\leq\ &\|J_1(u-v)(0)\|_{H^{[n/2]+1}}\\
&+C\int_0^t \|A(\tau,\cdot,J_1u(\tau),J_1v(\tau))\|_{H^{[n/2]+1}}\|J_1(u-v)(\tau)\|_{H^{[\frac{n}{2}]+1}}\mathrm{d}\tau
\end{aligned}
$$

由 Gronwall 不等式得解关于初值的连续依赖性以及解的唯一性。

推论 4.1.1 设 $F\in C^\infty(\mathbb{R}^{1+n+1})$ 满足 $\|\partial^\alpha F(t,\cdot,u)\|_{L^\infty}<\infty$. 对于这样的 F 的 Cauchy 问题 (4.1.1) 在 $H^s, s>n/2$, 中是适定的。解的破裂时间 $T^*_s=\sup\{T>0:\|u(t)\|_{L^\infty}<\infty, 0\leq t\leq T\}$.

证明 注意到

$$
\begin{aligned}
&\|u(t)\|_{H^s}\leq \|J_1u(t)\|_{H^{s-1}}\\
\leq\ &(1+t)\left(\|J_1u(0)\|_{H^{s-1}}+\int_0^t\|F(\tau,\cdot,u(\tau))\|_{H^{s-1}}\mathrm{d}\tau\right)\\
\leq\ &(1+t)\left(\|J_1u(0)\|_{H^{s-1}}+\int_0^t C\sum_{1\leq\alpha\leq s-1}\|\partial^\alpha F(\tau,\cdot,u(\tau))\|_{L^\infty}\|u(\tau)\|_{H^{s-1}}\mathrm{d}\tau\right)\\
\leq\ &(1+t)\left(\|J_1u(0)\|_{H^{s-1}}+\int_0^t C\sum_{1\leq\alpha\leq s-1}\|\partial^\alpha F(\tau,\cdot,u(\tau))\|_{L^\infty}\|u(\tau)\|_{H^{s}}\mathrm{d}\tau\right),
\end{aligned}
$$

注意到我们能继续讨论的条件是 $\|u(t,\cdot)\|_{L^\infty}$ 有界，我们只要 $\|u(t)\|_{H^s}\leq M$ 关于 t 的一致有界性即可得我们的结论。

注 4.1.1 设 $F=-u^5$, 对于以 $J_1u(0)=(u_0,u_1,\nabla u_0)\in H^1(\mathbb{R}^{1+3})$ 为初值的 $\mathbb{R}^{1+3}$ 中的 Cauchy 问题 (4.1.1), $T^*_s=\sup\{T>0:\int_0^T\|u(\tau)\|^2_{L^\infty}\mathrm{d}\tau<\infty\}$。

事实上，由推论 *4.1.1* 我们得局部存在性以及 $T^*_s=\sup\{T>0,\|u(t)\|_{L^\infty}<\infty, 0\leq t\leq T\}$。这样只要说明 $\int_0^T\|u(\tau)\|^2_{L^\infty}d\tau<\infty$ 意味着 $\|u(t)\|_{L^\infty}<\infty$。由 Sobolev 不等式，我们有 $\|u(t)\|_{L^\infty}\leq C\|J_1\nabla u(t)\|_{L^2}$。而 ∇u 是方程 $\Box(\nabla u)=$

$-5(\nabla u)u^4$ 的解。因此，由能量不等式、Sobolev 不等式以及 Hölder 不等式得

$$\begin{aligned}\|J_1\nabla u(t)\|_{L^2} &\leq C\left(\|J_1\nabla u(0)\|_{L^2}+\int_0^t\|\nabla u(\tau)u^4(\tau)\|_{L^2}\mathrm{d}\tau\right)\\ &\leq C\left(\|J_1\nabla u(0)\|_{L^2}+\int_0^t C\|\nabla u(\tau)\|_{L^6}\|u^4(\tau)\|_{L^3}\mathrm{d}\tau\right)\\ &\leq C\left(\|J_1\nabla u(0)\|_{L^2}+\int_0^t\|J_1\nabla u(\tau)\|_{L^2}\|u(\tau)\|_{L^\infty}^2\|u(\tau)\|_{L^6}^2\mathrm{d}\tau\right).\end{aligned}$$

为用 Gronwall 不等式我们要说明 $\|u(\tau)\|_{L^6}$ 是一致有界的。注意到

$$0=6\partial_t u(\Box u+u^5)=\partial_t(3(\partial u(\tau))^2+u^6)-6\sum_{i=1}^3\partial_i(\partial_t u\partial_i u),$$

在 $[0,\tau]\times\mathbb{R}^3$ 上积分上式得

$$3\|\partial u(0)\|_{L^2}^2+\|u(0)\|_6^6=3\|\partial u(\tau)\|_{L^2}^2+\|u(\tau)\|_{L^6}^6.$$

由此我们可得所要的 $\|u(\tau)\|_{L^6}$ 的界。

注 4.1.2 在推论 *4.1.1* 的证明中，我们发现：当我们用 $\|u(t)\|_{H^s}$ 估计 $\|u\|_{H^{s-1}}$ 时有一阶导数的亏损。从下面的推论可以看到：如果选取合适的非线性项，这样的亏损可以避免。

推论 4.1.2 对于 $F=u\partial u$, Cauchy 问题 (4.1.1) 在 $H^s, s>n/2$ 中适定. 此外 $T_s^*=\sup\{T>0:\|u(t)\|_{L^\infty}<\infty, 0\leq t\leq T\}$。

证明 由高阶能量不等式

$$\|u(t)\|_{H^s}\leq\|J_1u(t)\|_{H^{s-1}}\leq(1+t)\left(\|J_1u(0)\|_{H^{s-1}}+\int_0^t\|u(\tau)\partial u(\tau)\|_{H^{s-1}}\mathrm{d}\tau\right).$$

不等式右边的项 $\|u(\tau)\partial u(\tau)\|$ 包含所有低阶导数项 $\|\partial^{m-1}(u(\tau)\partial u)\|_{L^2}, m\leq s$, 这些项可以由形如 $\|\partial^\alpha u(\tau)\partial^\beta u(\tau)\|_{L^2}$ 的项的线性组合得到，$\alpha,\beta\in\mathbb{N}^n$, $|\alpha|+|\beta|=m$。由 Hölder 不等式和 Gagliardo-Nirenberg 不等式, 对于 $m\leq s$ 我们有

$$\begin{aligned}\|\partial^\alpha u(\tau)\partial^\beta u(\tau)\|_{L^2} &\leq C\|\partial^m u(\tau)\|_{L^2}^{\frac{|\alpha|}{m}}\|u(\tau)\|_{L^\infty}^{\frac{m-|\alpha|}{m}}\|\partial^m u(\tau)\|_{L^2}^{\frac{|\beta|}{m}}\|u(\tau)\|_{L^\infty}^{\frac{m-|\beta|}{m}}\\ &\leq C\|\partial^m u\|_{L^2}\|u\|_{L^\infty}.\end{aligned}$$

因此,

$$\|u(t)\|_{H^s}\leq\|J_1u(t)\|_{H^{s-1}}\leq(1+t)\left(\|J_1u(t)\|_{H^{s-1}}+\int_0^t\|u(\tau)\|_{L^\infty}\|u(\tau)\|_{H^s}\mathrm{d}\tau\right).$$

据此连续性讨论我们就有结论成立。

§4.2　拟线性方程的局部解

这节的目的是证明形如

$$\begin{cases} \Box u + \sum \gamma^{jk}(x,u,u')\partial_j\partial_k u = f(x,u,u') \\ u(0,\cdot) = u_0,\ \partial_0 u(0,\cdot) = u_1 \end{cases} \tag{4.2.1}$$

的拟线性方程的局部解存在性定理，我们将设 $\gamma^{00}=0$, $\gamma^{jk}, f \in C^\infty$ 且它们本身连同所有的导数均有界。还设 $f(x,0,0)=0$ 和 $\sum|\gamma^{jk}|<1/2$。我们用 $C^{j,1}$ 记 j 阶导数是 Lipschitz 连续的 C^j 函数的集合，其中 $j=0,1,\cdots$。

定理 4.2.1 *设某正整数 $s>(n+2)/2$, 如果 $(u_0,u_1)\in H^{s+1}\times H^s$，则存在 $T>0$, 依赖于初值的范数，使得 Cauchy 问题 (4.2.1) 有唯一的解满足*

$$u\in L^\infty([0,T];H^{s+1}(\mathbb{R}^n))\cap C^{0,1}([0,T];H^s(\mathbb{R}^n)). \tag{4.2.2}$$

$T_s^*=\sup\{T>0:\sum_{|\alpha|\le 2}\|\partial^\alpha u(t,\cdot)\|_{L^\infty}<\infty, 0\le t\le T\}$.

证明　存在性（用毕卡迭代法）. 我们将通过归纳定义来构造一个逼近序列。为此取 $u^{-1}=0$, u^0 是满足 $\Box u^0=0$ 及所给初值的解。对于 $m=1,2,\cdots$, u^m 定义为如下 Cauchy 问题的解：

$$\begin{cases} \Box u^m + \sum \gamma^{jk}(x,u^{m-1},u'^{m-1})\partial_j\partial_k u^m = f(x,J_1u^{m-1}), \\ u^m(0,\cdot)=u_0,\ \partial_t u^m(0,\cdot)=u_1. \end{cases} \tag{4.2.3}$$

显然 (4.2.2) 对 u^0 满足。

为方便我们将初值取在 $\mathcal{S}$ 中，我们可以通过类似的于定理 3.4.2 的证明用逼近的讨论把这一限制去掉. 在这样的假设下，由线性方程的局部存在性定理及归纳法知对每个 u^m 关于空间变量是光滑的，其各阶导数关于时间 t 是连续的且取值于任意 s 阶的 Sobolev 空间 H^s。对于 $0\le t\le T$, 我们将在假设已知

$$\sum_{|\alpha|\le 2}|\partial^\alpha u^m(t,\cdot)|\le M,\ 0\le t\le T \tag{4.2.4}$$

的前提下对 $\|J_1u^m(t,\cdot)\|_{H^s}$ 作出估计。然后，通过归纳说明 (4.2.4) 对适当小的 T 和大的 M 成立。最后说明这样的序列是收敛的。当然，对于 u^0, 我们可以取到适当的 T 和 M 使得 (4.2.4) 成立。

下面估计

$$M_m(t)=\|u^m(t,\cdot)\|_{H^{s+1}}+\|\partial_t u^m(t,\cdot)\|_{H^s}=\|J_1u^m(t,\cdot)\|_{H^s}. \tag{4.2.5}$$

对方程两边作用 $\partial_x^\alpha, |\alpha|\le s$, 得

$$\begin{aligned} &\left(\Box+\sum\gamma^{jk}(x,J_1(u^{m-1}))\partial_j\partial_k\right)\partial_x^\alpha u^m \\ =\ &\partial_x^\alpha f(x,J_1u^{m-1})-\sum_{j,k}[\partial_x^\alpha,\gamma^{jk}(x,J_1u^{m-1})]\partial_j\partial_k u^m. \end{aligned} \tag{4.2.6}$$

注意到 $\gamma^{00}=0$, 可知等式右边的和式是形如

$$\partial_x^{\alpha'}\partial_x\gamma^{jk}(x,J_1u^{m-1})(\partial_x^{\alpha''}\partial_x\partial u^m), |\alpha'|+|\alpha''|=|\alpha|-1\le s-1$$

的项的线性组合。对于 $0\le t\le T$, 用 $m-1$ 取代 (4.2.4) 中的 m 和 定理 2.7.5, 我们得

$$\|\partial_x\gamma^{jk}(x,J_1u^{m-1})\|_{L^\infty}\le C(M);$$
$$\|\partial_x^\alpha(\gamma^{jk}(x,J_1u^{m-1})-\gamma^{jk}(x,0))\|_{L^2}\le C(M)M_{m-1},|\alpha|\le s.$$

将第二章中的乘积函数估计用到 $m=s-1$ 时的 $\partial_x\gamma^{jk}(x,J_1u^{m-1})$ 和 $\partial_x\partial u^m$, (4.2.6) 右边和式的 L^2 范数能由 $C(M)(M_m(t)+M_{m-1}(t))$ 控制。由 定理 2.7.5, 我们有

$$\|\partial_x^\alpha f(x,J_1u^{m-1})\|_{L^2}\le C(M)M_{m-1},|\alpha|\le s.$$

这样由能量不等式 (3.3.5) 及 (4.2.4)

$$M_m(t)\le Ce^{C(M)t}\left(M_m(0)+C(M)\int_0^t(M_m(\tau)+M_{m-1}(\tau))\mathrm{d}\tau\right),\ 0\le t\le T, \tag{4.2.7}$$

这里 $M_m(0)=M_0(0)$ 与 m 无关。由 Gronwall 不等式得到

$$M_m(t)\le Ce^{C(M)t}(M_0(0)+C(M)\int_0^t M_{m-1}\mathrm{d}\tau e^{tCC(M)e^{C(M)t}}).$$

设 $A>CM_0(0)$ 且 $A>M_0(t),0\le t\le T$, 我们能根据上式通过从 $m-1$ 到 m 的递归, 选取 $T_{M,A}\le T$ 使得 $M_0(t)\le A,0\le t\le T_{M,A}$, 以及对任何 m, $M_m(t)\le A,0\le t\le T_{M,A}$ 成立。

由 Sobolev 不等式, 如果 $M_m(t)\le A$, 则

$$\sum_{|\alpha|\le 2}\|\partial^\alpha u_m(t,\cdot)\|_{L^\infty}\le C(A)$$

对 $s>n/2+1$ 成立。这样我们能估计 J_1u^m 和 $\partial_xJ_1u^m$ 的最大模, ∂_0^2u 可由 (4.2.1) 得到。用 $M=C(A)$, $T_{M,A}$ 取代 T, 也就用归纳证明了 (4.2.4) 式。这样我们已经找到 M 和 T 使得对所有的 m 有 (4.2.4) 和

$$M_m(t)\le A,\ 0\le t\le T$$

成立。

接下来我们只要证明 u_m 在 $C([0,T];H^1(\mathbb{R}^n))\cap C^1([0,T];L^2(\mathbb{R}^n))$ 中收敛于 Cauchy 问题的一个解 u, 因为由此必有 (4.2.1), (4.2.2) 自动满足。为此, 我们看到, 对于 $t\in[0,T]$ 如果

$$C_m(t)=\|u_m(t,\cdot)-u_{m-1}(t,\cdot)\|_{L^2}+\|u'_m(t,\cdot)-u'_{m-1}(t,\cdot)\|_{L^2}=O(2^{-m}) \tag{4.2.8}$$

那么, 对于 (u_m, u'_m) 在 $C([0,T];H^1)\times C([0,T];L^2)$ 中收敛于某个 (u,u')。显然, 这极限必是 Cauchy 问题的解。

为证 (4.2.8) 我们首先注意到能写

$$
\begin{aligned}
&\left(\Box+\sum\gamma^{jk}(x,J_1u_{m-1})\partial_j\partial_k\right)(u_m-u_{m-1})\\
=\ &\sum(\gamma^{jk}(x,J_1u_{m-2})-\gamma^{jk}(x,J_1u_{m-1}))\partial_j\partial_k u_{m-1}\\
&+f(x,J_1u_{m-1})-f(x,J_1u_{m-2}),
\end{aligned}
$$

又注意到对非线性项的假设, 方程的右端是

$$
O\left((|u_{m-1}-u_{m-2}|+|u'_{m-1}-u'_{m-2}|)\cdot(1+|u''_{m-1}|)\right)
$$

以及 u_m 和 u_{m-1} 在 $t=0$ 有相同的 Cauchy 初值。由 (3.3.5) 和 (4.2.5), 对于如上固定的 T, 必有一致常数 C 使得

$$
C_m(t)\le C\int_0^t C_{m-1}(\tau)\mathrm{d}\tau,\ 0\le t\le T.
$$

这样, 对于 $0\le t\le T$, 有

$$
C_m(t)\le C^m\int\cdots\int C_0(\tau_1)\mathrm{d}\tau_1\cdots\mathrm{d}\tau_m\le\frac{(Ct)^m}{m!}\sup_{0\le t\le T}C_0(t).
$$

由于这意味着 (4.2.8), 这就完成了定理存在性部分的证明。

我们的证明说明如果设初值的 $H^{s+1}\times H^s$ 范数比一个固定常数小, T 就有一个正常数下界。

唯一性 这一部分来自于 (4.2.8) 的证明。事实上, 设 u 和 $\tilde{u}$ 均在 $L^\infty([0,T];H^{s+1})\cap C^{0,1}([0,T];H^s)$ 中且是 (4.2.1) 满足相同的初值的解。则如上讨论说明, 对固定的 T, 必存在一个绝对常数 C, 依赖于它们的范数, 使得

$$
\sum_{|\alpha|\le1}\|\partial^\alpha(u-\tilde{u})(t,\cdot)\|_{L^2}\le C\int_0^t\sum_{|\alpha|\le1}\|\partial^\alpha(u-\tilde{u})(\tau,\cdot)\|_{L^2}\mathrm{d}\tau.
$$

由 Gronwall 不等式对 $t\in[0,T], u(t,\cdot)-\tilde{u}(t,\cdot)$ H^1 的范数必为零。这当然意味着在 $[0,T]\times\mathbb{R}^n$ 上 $u=\tilde{u}$.

我们仍然得证明定理的最后部分。为此, 我们设 T_s^* 是所有满足 (4.2.2) 的 Cauchy 问题解的存在时间 T 的上确界。由 Sobolev 不等式, (4.2.2) 意味着 J_1u 和 ∂_xJ_1u 当 $0\le t\le T$ 时关于 x 是一致 Hölder 连续的。由方程 (4.2.1) 说明 $\partial_t^2u(t,\cdot)$ 也是一致 Höler 连续的。这意味着对于 $0\le t\le T$, $0\le|\alpha|\le2, \partial^\alpha u$ 是一致有界的。因此剩下的是要说明 $\partial^\alpha u$ 没有一致有界性, 其中 $0\le|\alpha|\le2$。若不然, 对于一个固定的 M 和每个 $T<T_s^*$ 有 (4.2.4) 式成立。则对 $0\le t<T_s^*$ 不等式 (4.2.7) 对 $M_m(t)=M(t)$ 成立与 m 无关。因为我们可以取序列 u^m 就是 Cauchy 问题的精确解。对于 $0\le t<T_s^*$, 由 Gronwall 不等式可得 $M(t)$ 是一致有界的。正如我们已经看到的 u 有一个在 $0\le t\le T_s^*$ 的 C^2 延拓, 且 $u(T_s^*,\cdot)\in H^{s+1},\partial_tu(T_s^*,\cdot)\in H^s$。因此以 $T=T_s^*$ 为初值的 Cauchy 问题有一个解对 $T>T_s^*$ 满足 (4.2.4)。这与 T_s^* 的定义矛盾。

注 4.2.1 定理的结论对用假设 f 具紧支集取代 $f(x,0,0)=0$ 仍成立，用方程 (4.2.1) 可得 u 的所有 $\leq s+1$ 阶导数的 L^2 界；定理的证明说明对于给定的 T，对于某个 $s>(n+2)/2$，我们总可假设 $\|u_0\|_{H^{s+1}}, \|u_1\|_{H^s}$ 足够小，使得 Cauchy 问题的解 u 满足 (4.2.2)；定理的结论以及前面的说明对于取值在 $\mathbb{R}^n$ 的问题仍成立。特别地，还可以用此找出完全非线性方程

$$\Box u+u=F(u,u',u'') \tag{4.2.9}$$

满足相应初始条件的 Cauchy 问题的解。事实上，我们只要将方程两边关于 x_j 求导，将之转化为关于 $u_j=\partial_j u$ 的一个拟线性方程组，从而可以得到所需的结论。只不过这是对初值的正则性要求就会高出一阶导数。这样，如果 $s>(n+4)/2$，定理 *4.2.1* 的结论对完全非线性方程仍成立。这时的 $T_s^*=\sup\{T;\sum_{|\alpha|\leq 3}|\partial^\alpha u(t,\cdot)|<\infty, 0\leq t\leq T\}$。

如果人们希望获得对初值有更高阶导数要求的存在性证明，则如同 Klainerman [32] 中指出的可以用如下基本框架：设 s 是一个待定的正整数，我们试图建立

$$M_m(t)=\sum_{|\alpha|\leq s+1}\|\partial^\alpha u^m(t,\cdot)\|_{L^2},\ 0\leq t\leq T, \tag{4.2.10}$$

的一致有界性。注意到我们考虑所有 $\leq s+1$ 阶导数，由 Sobolev 不等式，对于固定的 t，这就有

$$|\partial^\alpha u^m(t,\cdot)|\leq CM_m(t),\ |\alpha|+\kappa\leq s+1, \tag{4.2.11}$$

其中 κ 是大于 $n/2$ 的最小整数。如果取 $s\geq\kappa+1$，这个估计对 $|\alpha|\leq 2$ 可用。我们要用归纳证明

$$M_m(t)\leq M,\ 0\leq t\leq T. \tag{4.2.12}$$

假设我们已知它对于用 $m-1$ 取代 m 是真的，用 $\partial^\alpha, |\alpha|\leq s$ 取代 (4.2.6) 中的 ∂_x^α。在最后的和式中对 J_1u^m 或 J_1u^{m-1} 的导数不会超过 s 次。如果 N 是一个整数使得 $2(N+1)>(s+1)$，即 $2N\geq s$，则没有两个因子使得 J_1u^m 或 J_1u^{m-1} 的导数超过 N 次。这样如果 $N+\kappa\leq s$，(4.2.10) 能估计除一项外的所有因子。这样 (4.2.6) 的右端的 L^2 范数能由 $C(M)(M_m(t)+1)$ 来估计，能量估计给出

$$M_m(t)\leq Ce^{C(M)t}\left(M_m(0)+C(M)\int_0^t(M_m(t)+1)\mathrm{d}\tau\right).$$

当 $m\leq s$ 时 $\partial^\alpha u^m, |\alpha|\leq s$ 的导数等于 $t=0$ 时 Cauchy 问题的形式解的导数，因此与 m 无关，由 Gronwall 不等式

$$M_m(t)\leq Ce^{C(M)t}(M_m(0)+C(M)t\exp(tC(M)e^{C(M)t})),\ 0\leq t\leq T.$$

如果 $M>CM_m(0)$，T 充分小，(4.2.11) 成立。这样证明可如前完成之。

条件 $N+\kappa\leq s\leq 2N$ 意味着 $N\geq\kappa$ 和 $s\geq 2\kappa$，这样照此法去估计 u^m 我们必须假设在 定理 4.2.1 的初值有两倍于它的导数次数。以后我们将主要考虑 C_0^∞ 初值的 Cauchy 问题，在这种情形，定理 4.2.1 就成为

定理 4.2.2 如果 $u_0, u_1 \in C_0^\infty$, 则存在一个 $T > 0$, 使得 (4.2.1) 有一个解 $u \in C^\infty([0,T] \times \mathbb{R}^n)$. 如果 T_* 记这样的时间 T 的上确界, 则或 $T_* = \infty$ 或

$$\sum_{|\alpha|\le(n+6)/2} |\partial^\alpha u(t,x)| \notin L^\infty([0,T_*) \times \mathbb{R}^n) \tag{4.2.13}$$

以上是基于能量不等式和 Sobolev 不等式得到的经典理论。在此我们再介绍一个如何利用能量不等式 (3.3.2) 的证明来给出 John 的意味着非线性波动方程解的唯一性的定理。

定理 4.2.3 设 u 是 $\Box u = F(u,u',u'')$ 在过 (t_0,x_0) 的后向光锥:

$$\Lambda^-_{(t_0,x_0)} = \{(t,x) \in [0,t_0) \times \mathbb{R}^n : |x - x_0| < t_0 - t\}$$

中的一个 C^2 解, 设

$$F(0,0,u'') = 0, \tag{4.2.14}$$

则如果当 $|x - x_0| < t_0$ 时

$$u(0,x) = \partial_t u(0,x) = 0, \tag{4.2.15}$$

则 u 在 $\Lambda^-_{(t_0,x_0)}$ 中为零。

从这个定理我们立刻得到对这种类型的非线性方程 Huygen's 原理成立。

形如 $\Box u = F(u), F(0) = F'(0) = 0$ 的半线性方程满足条件 (4.2.14)。对于如下类型的拟线性方程

$$\Box u = \sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha\beta}(u') D_\alpha D_\beta u, \tag{4.2.16}$$

其中 $a_{\alpha\beta}(u') = a_{\beta\alpha}(u'), a_{\alpha\beta}(0) = 0$ 也满足。

推论 4.2.1 设 (4.2.14) 成立, 则如果 u 是 $\Box u = F(u,u',u'')$ 在 $(0,T)\times\mathbb{R}^n$ 中满足对 $|x| > R, u(0,x) = \partial_t u(0,x) = 0$ 的 C^2 解, 则如果 $|x| > R + t, 0 \le t < T, u(t,x) = 0$。

定理 4.2.3 **的证明** 我们将用能量方法。用光滑超曲面 Λ_s 覆盖 $\Lambda^-_{t_0,x_0}$ 的内部, 这些超曲面关于达朗贝尔是类空的, 且有一个公共的边界流形 $|x - x_0| = t_0, t = 0$, 我们这里取这些 Λ_s 为双曲球面。为此我们将 $\Lambda^-_{t_0,x_0}$ 写成单参数双曲球面族的和, 在每个双曲球面上我们能用证明 (3.3.2) 的方法得到 $|u'|^2$ 的积分的一个估计。我们将看到 u 在 $\Lambda^-_{t_0,x_0}$ 中零能量, 由于 (4.2.15), 这意味着 u 在 $\Lambda^-_{t_0,x_0}$ 中必为 0。

更具体地, 对于 $0 \le s < t_0$, 设

$$\phi(s,x) = t_0 - [(t_0 - s)^2 + t_0^{-2}(2t_0 s - s^2)|x - x_0|^2]^{1/2}$$

则 $\phi(0,x) = 0$ 和 $\lim_{s\to t_0} \phi(s,x) = t_0 - |x - x_0|$. 因此, 如果

$$R_s = \{(t,x) : 0 \le t \le \phi(s,x), |x - x_0| < t_0 - t\}$$

则 $\Lambda^-_{t_0,x_0} = \cup_{0\le s<t_0} R_s$ 。

注意到在 $\Lambda^-_{t_0,x_0}$ 中, 如果 $0 \le s \le s_0 < t_0$,

$$|\nabla_x \phi(s,x)| = \frac{t_0^{-2}(2t_0 s - s^2)|x-x_0|}{[(t_0-s)^2 + t_0^{-2}(2t_0 s - s^2)|x-x_0|^2]^{1/2}} \le \theta(s_0) < 1,$$

其中 $\theta(s)$ 是某 s 的函数。令 $\Lambda_s = \{(t,x) : t = \phi(s,x), |x-x_0| < t_0\}$ 。我们知道 $(\phi(s,x),x) \in \Lambda_s$ 的单位外向法向量是

$$(1, -\nabla_x \phi)/\sqrt{1+|\nabla_x \phi|^2}.$$

这样, 由 (3.3.1),(4.2.15) 和散度定理, 如果 $0 \le s \le s_0$,

$$\begin{aligned}\int_{R_s} 2\partial_t u F \mathrm{d}t\mathrm{d}x &= \int_{R_s} 2\partial_t u \Box u \mathrm{d}t\mathrm{d}x \\ &= \int_{\Lambda_s} (|u'|^2 + 2\partial_t u \nabla_x u \cdot \nabla_x \phi) \frac{\mathrm{d}\sigma}{\sqrt{1+|\nabla_x \phi|^2}} \\ &\ge (1-\theta(s_0)) \int_{\Lambda_s} |u'|^2 \mathrm{d}\sigma / \sqrt{1+|\nabla_x \phi|^2}. \end{aligned} \tag{4.2.17}$$

为了得到另一方向的界, 首先注意到, 由 (4.2.15)

$$\int_0^{\phi(s,x)} |u(t,x)|^2 \mathrm{d}t \le t_0^2 \int_0^{\phi(s,x)} |\partial_t u(t,x)|^2 \mathrm{d}t,$$

由 (4.2.14)

$$2|\partial_t u F| \le C(|u|^2 + |u'|^2).$$

这样,

$$\begin{aligned}\int_{R_s} 2\partial_t u F \mathrm{d}t\mathrm{d}x &\le C(1+t_0^2) \int_{R_s} |u'|^2 \mathrm{d}t\mathrm{d}x \\ &= C(1+t_0^2) \int_0^s \int_{\Lambda_t} \partial_t \phi |u'|^2 \frac{\mathrm{d}\sigma \mathrm{d}t}{\sqrt{1+|\nabla_x \phi|^2}}. \end{aligned} \tag{4.2.18}$$

如果我们令

$$I(s) = \int_{\Lambda_s} |u'|^2 \mathrm{d}\sigma / \sqrt{1+|\nabla_x \phi|^2},$$

则 (4.2.17) 和 (4.2.18) 意味着对于 $0 \le s \le s_0 < t_0$,

$$(1-\theta(s_0)I(s) \le C(1+t_0^2) \sup_{\substack{0 \le t \le s_0 \\ |x-x_0|<t_0}} |\partial_t \phi(t,x)| \int_0^s I(t)\mathrm{d}t.$$

应用 Gronwall 不等式证明对所有的 $0 \le s < t_0, I(s) = 0$.

因此在 $\Lambda^-_{(t_0,x_0)}$ 中 $u' = 0$, 且由于 (4.2.15), 这也意味着在此 u 也必为 0。

显然, 对于拟线性波动方程 (4.2.16), 我们有

定理 4.2.4 设 $u(t,x)$ 是方程 (4.2.16) 在 $0 \le t \le \tau, x \in \mathbb{R}^n$ 中的满足初始条件

$$u(0,x) = f(x), u_t(0,x) = g(x) \tag{4.2.19}$$

的一个 C^2 解，其中 f 和 g 有紧支集适当光滑函数。设存在一个 $\theta(s) < 1$ 使得“双曲性条件”

$$-\sum_{\alpha\beta=0}^{n} a_{\alpha\beta}(Du(t,x))X_\alpha X_\beta \le \theta(s)\sum_{\alpha=0}^{n} X_\alpha^2 \tag{4.2.20}$$

成立，则这样的 C^2 解是唯一的。

§4.3 三维半线性方程的局部解

在 $(1+3)$ 维中，半线性波动方程有一个非常简单的局部存在性定理，这是基于达朗贝尔在 $\mathbb{R}^{1+3}$ 中的前向基本解是非负测度和相关的线性波动方程解的正则性性质所导致的。我们将在以后的对半线性波动方程小初值整体存在性的研究中，与在证明 $(1+3)$ 维中的“临界”半线性波动方程的大初值整体存在性问题的证明中用到。

对于 $F \in C^k, F(0) = 0$，我们将研究 Cauchy 问题

$$\begin{cases} \Box u(t,x) = F(u(t,x)),\ t > 0, \\ u(0,x) = f(x),\ \partial_t u(0,x) = g(x). \end{cases} \tag{4.3.1}$$

我们知道如果方程是线性的，若 $f \in C^{k+1}(\mathbb{R}^3)$ 和 $g \in C^k(\mathbb{R}^3)$，则 $u \in C^k(\mathbb{R}^{1+3}_+)$。对于这样的非线性方程，为简单起见，我们设初值具有紧支集性质。

定理 4.3.1 假设如上，$F \in C^k, F(0) = 0, f \in C_0^{k+1}(\mathbb{R}^3), g \in C_0^k(\mathbb{R}^3), k = 1, 2, \cdots$，则存在一个 $T > 0$ 使得 (4.3.1) 有唯一的解 $u \in C^k([0,T] \times \mathbb{R}^3)$。如果这样的 T 的上确界 T_* 是有限的，则当 $t \to T_*$ 时 $\sup_x |u(t,x)| \to \infty$。

证明 如同 定理 4.2.1 的证明，我们将用逐次逼近得到 u。因此，设 $u_{-1} \equiv 0$，由

$$\begin{cases} \Box u_m = F(u_{m-1}),\ t > 0, \\ u_m(0,x) = f(x),\ \partial_t u_m(0,x) = g(x), \end{cases}$$

定义 $u_m, m = 0, 1, 2, \cdots$ 注意到 u_0 是以 (f,g) 为初值的线性 Cauchy 问题的一个解，也注意到，由 F 和初值的假设，定理 3.1.1 和 Duhamel 原理意味着每个这样的 u_m 在 $C^{k-1,1}([0,T] \times \mathbb{R}^3)$ 中。然而，要说明 u_m 在某带形 $[0,T] \times \mathbb{R}^3$ 上收敛于一个 C^k 解，我们将要作以下两步：第一步说明，如果 $T > 0$ 足够小，u_m 一致收敛于一个 $C^{k-1,1}([0,T] \times \mathbb{R}^3)$ 解；第二步，利用 F 是 C^k 和 u_0 是 C^k 线性齐次方程解的事实。我们将一致控制当 $|\alpha| = k$ 时，$\partial^\alpha u_m$ 的连续性的表示式，从而导出 $u \in C^k$。

对于第一步，注意到由于 $(f,g) \in C^{k+1} \times C^k$ 有紧支集，(3.1.5) 意味着必存在一个一致常数 C_0 使得具有这样初值的线性 Cauchy 问题的解满足

$$\sum_{|\alpha| \le k} |\partial^\alpha u_0(t,x)| \le C_0.$$

如果 $C = 2C_0$, 我们断言: 如果 $T > 0$ 足够小, 则对于 $m = 1, 2, \cdots$ 成立

$$C_m(T) = \sum_{|\alpha|<k} \sup_{\{(t,x):0\le t\le T\}} |\partial^\alpha u_m(t,x) - \partial^\alpha u_{m-1}(t,x)| \le C2^{-m}, \tag{4.3.2}$$

和

$$B_m(t) = \sum_{|\alpha|=k} \sup_x |\partial^\alpha u_m(t,x)| \le C,\ 0 \le t \le T. \tag{4.3.3}$$

如果这个断言成立，则 u_m 一致收敛于 (4.3.1) 的一个 $C^{k-1,1}([0,T]\times\mathbb{R}^3)$ 解。

先证 (4.3.2). 我们将假设当 m 用一个小一些的数 n 来代, 估计式成立。那么我们将看到如果 $T > 0$ 足够小, (4.3.2) 成立。作为归纳假设的一个推论，我们有

$$\sum_{|\alpha|<k} |\partial^\alpha u_n(t,x)| \le 2C, \text{如果} 0 \le t \le T, \text{和} n < m. \tag{4.3.4}$$

为利用这一点, 注意到 $u_m = w_m + u_0$, 其中 w_n 解非齐次波动方程:

$$\begin{cases} \Box w_m(t,x) = F(u_{m-1}(t,x)),\ t > 0 \\ w_m(0,x) = \partial_t w_m(0,x) = 0. \end{cases}$$

回顾 (3.1.10), 我们看到对于 $m = 1, 2, \cdots$

$$\begin{aligned} &|\partial^\alpha u_m(t,x) - \partial^\alpha u_{m-1}(t,x)| \\ \le\ &\int_{|y|<t} |\partial^\alpha F(u_{m-1}(t-|y|, x-y)) - \partial^\alpha F(u_{m-2}(t-|y|, x-y))| \frac{\mathrm{d}y}{|y|}. \end{aligned} \tag{4.3.5}$$

如果 $|\alpha| < k$, 则右端绝对值内的项是形如

$$F^{(j)}(u_{m-1})\partial^{\alpha_1}u_{m-1}\cdots\partial^{\alpha_l}u_{m-1} - F^{(j)}(u_{m-2})\partial^{\alpha_1}u_{m-2}\cdots\partial^{\alpha_l}u_{m-2},\ j, |\alpha_i| < k.$$

的项的线性组合，其中 $l < k-1$。注意到 $F^{(j)} \in C^1, \partial^{\alpha_i}u \in C^1$, 从 (4.3.4), (4.3.5) 可得存在一个一致常数 C_1 使得

$$\begin{aligned} C_m(T) &\le C_1T^2[1 + \sum_{|\alpha|<k} \sup_{\{(t,x):0\le t\le T\}} (|\partial^\alpha u_{m-1}(t,x)| + |\partial^\alpha u_{m-2}(t,x)|)]^k C_{m-1}(T) \\ &\le C_1(1+4C)^k T^2 C_{m-1}(T), \end{aligned}$$

取 $T \le (2C_1(1+4C)^k)^{-1/2}$, 就可得 (4.3.2)。

(4.3.3) **的证明** 设估计式当 $m-1$ 时成立, 则由于 $u_m = u_0 + w_m$, 利用前面关于 u_0 的假设, 如果 $|\alpha| = k$, 我们有

$$\begin{aligned} |\partial^\alpha u_m(t,x)| &\le B_0(t) + \int_{|y|<t} |\partial^\alpha F(u_{m-1}(t-|y|, x-y))|\mathrm{d}y/|y| \\ &\le C/2 + \int_{|y|<t} |\partial^\alpha F(u_{m-1}(t-|y|, x-y))|\mathrm{d}y/|y|. \end{aligned}$$

为估计最后一项, 我们注意到绝对值内的项是由形如 $F'(u_{m-1})\partial^\alpha u_{m-1}$ 的项, 加上形如 $F^{(k)}(u_{m-1})\partial^{j_1}u_{m-1}\cdots\partial^{j_k}u_{m-1}$ 的项, 和另外对 F 中 u_{m-1} 的微分均不超过 $k-1$ 次的项的线性组合组成。

由归纳假设, 因子 $F'(u_{m-1})=O(1)$, 由于我们已经说明 (4.3.4) 对所有 m 成立, 第一项是一致有界的, 一致常数为 C。(4.3.4) 也意味着所有的其他项可由一个固定的常数来控制, 我们说存在一个常数 C_0 使得

$$B_m(t)\le C/2+C_0(C+1)\int_{|y|<T}\mathrm{d}y/|y|\le C/2+C_0'(C+1)T^2,$$

如果取 $T^2\le[C_0'(C+1)]^{-1}C/2$, 则 (4.3.3) 成立。

我们已经说明 $u_m\to u$ 在 $C^{k-1,1}([0,T]\times\mathbb{R}^3)$ 中成立, 且 u_m 的 k 阶导数是一致有界的。由于 u_m 的支集与 $[0,T]\times\mathbb{R}^3$ 的交包含在一个固定的紧支集中, 如果我们能说明当 $|\alpha|=k$ 时 $\partial^\alpha u_m$ 在 $[0,T]\times\mathbb{R}^3$ 上是等度连续的, 由 Arzelà-Ascoli 引理我们就有, $u\in C^k([0,T]\times\mathbb{R}^3)$。

固定 $|\alpha|=k$, 对于 $h=(h_0,h_1,h_2,h_3),h_0\ge 0$ 令

$$w_m(h)=\sup_{\{(t,x):t+h_0\le T\}}|\partial^\alpha u_m((t,x)+h)-\partial^\alpha u_m(t,x)|.$$

我们必须说明如果 $T>0$ 足够小并且固定, 则对任意给定 $\varepsilon>0$, 存在一个与 m 无关的 $\delta>0$, 使得当 $|h|<\delta$ 时

$$w_m(h)<\varepsilon. \tag{4.3.6}$$

为此, 设 $h'=(h_1,h_2,h_3)$, 则

$$\begin{aligned}
&|\partial^\alpha u_m((t,x)+h)-\partial^\alpha u_m(t,x)|\\
\le\ & |\partial^\alpha u_0((t,x)+h)-\partial^\alpha u_0(t,x)|+\int_{|y|<t}|\partial^\alpha F(u_{m-1}(t+h_0-|y|,x+h'-y))\\
&-\partial^\alpha F(u_{m-1}(t-|y|,x-y))|\frac{\mathrm{d}y}{|y|}\\
&+\int_{t<|y|<t+h_0}|\partial^\alpha F(u_{m-1}(t+h_0-|y|,x+h'-y))|\frac{\mathrm{d}y}{|y|}\\
\le\ & w_0(h)+CTh_0+\int_{|y|<t}|\partial^\alpha F(u_{m-1}(t+h_0-|y|,x+h'-y))\\
&-\partial^\alpha F(u_{m-1}(t-|y|,x-y))|\frac{\mathrm{d}y}{|y|}\\
=\ & w_0(h)+CTh_0+R.
\end{aligned}$$

为估计最后一项 R, 设 $(s_1,y_1)=(t+h_0-|y|,x+h'-y)$ 和 $(s_2,y_2)=(t-|y|,x-y)$。则积分定义式 R 的被积函数绝对值内的表达式能写成形如

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}\ =\ & F^{(j)}(u_{m-1}(s_1,y_1))\cdot(\partial^{\alpha_1}u_{m-1}\cdots\partial^{\alpha_l}u_{m-1})(s_1,y_1)\\
&-F^{(i)}(u_{m-1}(s_2,y_2))\cdot(\partial^{\alpha_1}u_{m-1}\cdots\partial^{\alpha_l}u_{m-1})(s_2,y_2),\ j,|\alpha|<k,
\end{aligned}$$

$$\mathrm{II} = F'(u_{m-1}(s_1, y_1))\partial^\alpha u_{m-1}(s_1, y_1) - F'(u_{m-1}(s_2, y_2))\partial^\alpha u_{m-1}(s_2, y_2)$$

和，对于 $k > 1$,

$$\begin{aligned}\mathrm{III} &= F^{(k)}(u_{m-1}(s_1, y_1))(\partial_{j_1} u_{m-1} \cdots \partial_{j_k} u_{m-1})(s_1, y_1)\\ &\quad -F^{(k)}(u_{m-1}(s_2, y_2))(\partial_{j_1} u_{m-1} \cdots \partial_{j_k} u_{m-1})(s_2, y_2),\end{aligned}$$

的项的线性组合。

由于 $F \in C^k$, 从 (4.3.3) 和 (4.3.4) 可得 $|I| \le C|h|$。另一方面, 存在一个一致常数 C_0, 使得

$$|\mathrm{II}| + |\mathrm{III}| \le C_0(\sum_{j=1}^{k} \sup_{\substack{|v| \le C_0|h| \\ |u| \le C_0}} |F^{(j)}(u+v) - F^j(u)| + w_{m-1}(h) + |h|).$$

代入这些界到积分式 R, 我们得到

$$w_m(h) \le w_0(h) + CT|h| + CT^2(\sum_{j=1}^{k} \sup_{\substack{|v| \le C_0|h| \\ |u| \le C_0}} |F^{(j)}(u+v) - F^j(u)| + w_{m-1}(h) + |h|).$$

设 T 足够小, 使得 $CT^2 < 1/2$, 由于 u_0, F 均是 C^k, 这将导致

$$w_m(h) \le 2w_0(h) + (1 + 2CT)|h| + \sum_{j=1}^{k} \sup_{\substack{|v| \le C_0|h| \\ |u| \le C_0}} |F^{(j)}(u+v) - F^j(u)|,$$

也就得到 (4.3.6) 必成立。

这已经完成了存在性的证明, 唯一性的证明与 定理 4.2.1 中的一样。只是来自于方程的局部存在性定理的修改, 留作练习。

为完成证明, 我们必须说明若 u 是 (4.3.1) 在 $[0, T) \times \mathbb{R}^3$ 中的一个 C^k 解, 如果

$$\sup_{\{(t,x): 0 \le t < T\}} |u(t, x)| \le A$$

则 u 能延拓到闭带形 $[0, T] \times \mathbb{R}^3$ 中的一个 C^k 函数。

我们断言，这意味着所有 $\le k$ 阶导数在带形中是一致有界的，为看到这一点, 我们注意到 $\Box u' = F'(u)u'$, (3.1.10) 意味着

$$\begin{aligned}\|u'(t, \cdot)\|_{L^\infty} &\le \|u_0'(t, \cdot)\|_{L^\infty} + \int_0^t (t-s)\|F'(u(s, \cdot))u'(s, \cdot)\|_{L^\infty} \mathrm{d}s\\ &\le C + CT\int_0^t \|u'(s, \cdot)\|_{L^\infty} \mathrm{d}s.\end{aligned}$$

由 Gronwall 不等式, 这给出了 u' 的界。其他各阶的界来自于类似的讨论。这说明 u 可拓广到 $[0, T] \times \mathbb{R}^3$ 中的 $C^{k-1,1}$ 函数。为看到 $u \in C^k$, 对于 $|\alpha| = k$ 和上面的 h, 令

$$w(t, h) = \begin{cases} \sup_x |\partial^\alpha u((t, x) + h) - \partial^\alpha u(t, x)|, & \text{如果} t + h_0 \le T, \\ 0, & \text{否则。} \end{cases}$$

则如同 (4.3.6) 的讨论, 我们能得到

$$w(t,h) \le w_0(h) + C_T(|h| + \sum_{j=1}^{k} \sup_{\substack{|v|\le C|h| \\ |u|\le C}} |F^{(j)}(u+v) - F^j(u)| + \int_0^t w(s,h)\mathrm{d}s).$$

对某固定常数 C, 如果 $w_0(h)$ 如上, 由 Gronwall 不等式这意味着

$$w(t,h) \le C_T'(w_0(h) + \sum_{j=1}^{k} \sup_{\substack{|v|\le C|h| \\ |u|\le C}} |F^{(j)}(u+v) - F^j(u)|).$$

由于 u_0, F 是 C^k 函数, 当 $h \to 0$ 上式右端趋于 0。因此 u 的 k 阶导数的连续的表达式是可控的, 这意味着 u 能延拓至闭带 $[0,T] \times \mathbb{R}^3$ 中的一个 C^k 函数。

§4.4 具零形式的方程的局部解

我们考虑如下的非线性双曲型方程组:

$$\begin{cases} \Box u^I(t,x) = F^I(u(t,x), u'(t,x)),\ (t,x) \in \mathbb{R}_+^{1+3},\ I = 1,\cdots,N, \\ u(0,x) = \varepsilon f(x),\ \partial_t u(0,x) = \varepsilon g(x), \end{cases} \tag{4.4.1}$$

这里 $u = (u^1,\cdots,u^N)$。如果我们令 $F = (F^1,\cdots,F^N) \in C^\infty$, 重写 (4.4.1) 中方程部分为

$$\Box u = F(u,u').$$

如前我们将仍假设 (4.4.1) 的线性化是具有上面初值的齐次波动方程 $\Box u = 0$ 的 Cauchy 问题。因此, 我们设

$$F(0,0) = 0,\ 和 \mathrm{d}F(0,0) = 0. \tag{4.4.2}$$

所谓的零条件事实上是对非线性函数的一种结构性假设, 是由 Klainerman 于 1985 年引入的, 其定义如下:

定义 4.4.1 设 F 满足 (4.4.2), F_0 记 F 的二次部分, 使得

$$F = F_0 + O(|u|^3 + |u'|^3).$$

那么我们说 F 满足零条件: 如果 F_0 与 u 无关, 且对每个 $I = 1,\cdots,N$

$$F_0^I = F_0^I(u') = \sum_{L,M=1}^{N} \sum_{j,k=0}^{3} f_{jk}^{ILM} \partial_j u^L \partial_k u^M, \tag{4.4.3}$$

其中 f_{jk}^{ILM} 是常数, 满足

$$\sum_{j,k=0}^{3} f_{jk}^{ILM} \xi_j \xi_k = 0,\ \xi_0^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2.$$

注意到如果我们假设零条件，则 (4.4.1) 中的非线性的主要部分必须有一个特殊的形式。事实上，如果令

$$Q_0(v,w)=\partial_t v\partial_t w-\sum_{j=1}^{3}\partial_j v\partial_j w. \tag{4.4.4}$$

和

$$Q_{ab}(v,w)=\partial_a v\partial_b w-\partial_a w\partial_b v,\ 0\le a<b\le 3, \tag{4.4.5}$$

则我们断言 $F_0(u')$ 一定是仅包括这些“零形式”的线性组合。具体地，必有常数 C_0^{IJK} 和 C_{ab}^{IJK} 使得

$$F_0^I=\sum_{J,K=1}^{N}C_0^{IJK}Q_0(u^J,u^K)+\sum_{J,K=1}^{N}\sum_{0\le a<b\le 3}Q_{ab}(u^J,u^K). \tag{4.4.6}$$

我们可以证明，如果 $B(\xi,\eta)$ 是当 $\xi_0^2=\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2$ 时满足 $B(\xi,\xi)=0$ 的 $\mathbb{R}^{1+3}\times\mathbb{R}^{1+3}$ 上的双线性形式，则我们可以说明 B 必是 $Q_0(\xi,\eta)=\xi_0\eta_0-\sum_{j=1}^{3}\xi_j\eta_j$ 和 $Q_{ab}(\xi,\eta)=\xi_a\eta_b-\xi_b\eta_a, 0\le a<b\le 3$ 的一个线性组合。

事实上，我们可以将 $B(\xi,\eta)$ 写成 $\xi^{\mathrm{T}}A\xi$ 的形式，其中的矩阵 $A=(a^{\mu\nu})$ 是实的 4×4 阵。若将 A 分解成对称与斜对称真的和 A_s+A_a。由于 $\xi^{\mathrm{T}}A\xi=(\xi^{\mathrm{T}}A\xi)^{\mathrm{T}}=\xi^{\mathrm{T}}A\xi=0$，我们有 $\xi^{\mathrm{T}}A_s\xi=\xi^{\mathrm{T}}A\xi=0$ 对所有的零向量 $\xi\in\Gamma=\{\xi=(\xi_0,\xi_1,\xi_2,\xi_3)|\xi_0^2=\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2\}$ 成立。特别取 $\xi^{\mathrm{T}}=(\pm1,1,0,0),(\pm1,0,1,0),(\pm1,0,0,1)$，以及 $\xi^{\mathrm{T}}=(\sqrt{2},1,1,0),(\sqrt{2},1,0,1),(\sqrt{2},0,1,1)$ 不难看到 A_s 必是 $a^{00}\mathrm{diag}\ (1,-1,-1,-1)$ 的形式，这就对应于 Q_0。对于斜对称部分，它可以写成 Q_{ab} 的一个组合 $\sum_{0\le\mu<\nu\le 3}\frac{1}{2}(a^{\mu\nu}-a^{\nu\mu})Q_{\mu\nu}$。

在这一节我们将说明，对于具有零形式非线性的波动方程，能改进前面得到的局部存在性定理中的正则性假设。我们这里将要考虑的方程的类型是

$$\begin{cases}\Box u^I=\sum_{J,K=1}^{N}\Gamma_{J,K}^I(u)Q_{J,K}^I(u^J,u^K),\ I=1,\cdots,N,\\ u(0,\cdot)=f,\ \partial_t u(0,\cdot)=g,\end{cases} \tag{4.4.7}$$

其中 $\Gamma_{J,K}^I\in C^\infty$ 对所有 I,J,K 成立，$Q_{J,K}^I$ 是上节中引入的零形式 Q_0 和 Q_{ab} 的线性组合，即

$$Q_{J,K}^I(v,w)=C_{J,K}^IQ_0(v,w)+\sum_{0\le a<b\le n}C_{J,K}^{Iab}Q_{ab}(v,w)$$

对某常数 $C_{J,K}^I$ 和 $C_{J,K}^{Iab}$ 成立。对于波映照方程，我们只有 $Q_{J,K}^I=Q_0$，$\Gamma_{J,K}^I$ 是 Christoffel 象征。

我们首先叙述 Klainerman 和 Machedon [37] 的一个结果，这个结果说明当 $n=3$ 时，我们所需的正则性比前面假设要求少。

定理 4.4.1 *设 $n=3$，固定 $(f,g)\in H^2(\mathbb{R}^3)\times H^1(\mathbb{R}^3)$，则存在一个 $T>0$ 使得 (4.4.7) 有唯一解满足*

$$u\in C([0,T];H^2)\cap C^1([0,T];H^1), \tag{4.4.8}$$

和

$$Q(u^J,u^K)\in H^1([0,T]\times\mathbb{R}^3),\forall J,K,\tag{4.4.9}$$

其中 Q 是一个零形式。

由定理 4.2.1, 我们知道具 $H^{s+1}(\mathbb{R}^n)\times H^s(\mathbb{R}^n)$, $s>(n+2)/2$ 初值的拟线性方程的局部解存在。这样，定理 4.4.1 是说对于像 (4.4.7) 这样的特殊类型的方程，在正则性的假设中存在 1/2 阶导数的改善。另一方面，Nirenberg 有例子说明如果 $n=3$, 对 $s>3/2$ 我们能期望定理成立。但 Lindblad [41,42] 已经说明对于方程 $\Box u=u_t^2$, 如果 $n=3, s\le 2$, 定理不成立。这样在某种意义下说明定理 4.4.1 是最优的。

回到定理 4.4.1, 注意到如果 $T<\infty$, 由于 (4.4.9) 意味着 (4.4.7) 的右边属于 $L^1([0,T];H^1)$, 我们看到如果 (4.4.9) 满足，对线性方程的存在性定理本质上意味着 (4.4.8) 成立。这样证明定理 4.4.1 的主要内容是得到保证 (4.4.9) 成立的估计。这也包含在由 Klainerman 和 Machedon 给出的结果中。

定理 4.4.2 对于 $j=1,2$, 设 $u_j(t,x)$ 是

$$\begin{cases}\Box u_j(t,x)=F_j(t,x),\ (t,x)\in\mathbb{R}_+^{1+3},\\ u_j(0,\cdot)=f_j,\ \partial_t u_j(0,\cdot)=g_j,\end{cases}\tag{4.4.10}$$

的解，则如果 Q 是一个零形式，我们就有

$$\begin{aligned}&\sum_{|\alpha|\le 1}\|\partial^\alpha Q(u_1,u_2)\|_{L^2(\mathbb{R}_+^{1+3})}\\ \le\ & C\prod_{j=1,2}\left(\|f_j\|_{H^2(\mathbb{R}^3)}+\|g_j\|_{H^1(\mathbb{R}^3)}+\int_0^\infty\|F_j(t,\cdot)\|_{H^1(\mathbb{R}^3)}\mathrm{d}t\right).\end{aligned}\tag{4.4.11}$$

注 4.4.1 注意到 (4.4.11) 是一个双线性估计。与早期的 Strichartz 估计

$$\|u\|_{L^4(\mathbb{R}_+^{1+3})}\le C(\|f\|_{\dot H^{1/2}(\mathbb{R}^3)}+\|g\|_{\dot H^{-1/2}(\mathbb{R}^3)}+\int_0^\infty\|F(t,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\mathrm{d}t)\tag{4.4.12}$$

有关，这里的 u 是具初值 (f,g) 的线性方程 $\Box u=F$ 的解。我们看到，(4.4.12) 等价于下面的 Fourier 变换在 $\mathbb{R}_+^{1+3}$ 光锥中的限制。

$$(\int_{\mathbb{R}^3}|\tilde F(|\xi|,\xi)|^2\mathrm{d}\xi/|\xi|)^{1/2}\le C\|F\|_{L^{4/3}(\mathbb{R}^{1+3})},\ F\in S(\mathbb{R}^{1+3}).\tag{4.4.13}$$

这里 $\tilde F$ 记 F 的时空 Fourier 变换。

定理 4.4.2 的证明 为简单，我们设在 (4.4.10) 中 $g_j=0, F_j=0$。一般情形来自于这些特殊情形。

首先我们考察 $|\alpha|=1$ 时的 (4.4.11), 即如果 Q 是一个零形式，

$$\|\partial Q(u_1,u_2)\|_{L^2(\mathbb{R}^{1+3})}\le C\|f_1\|_{H^2(\mathbb{R}^3)}\|f_2\|_{H^2(\mathbb{R}^3)}.$$

由于 $\partial_k Q(u_1,u_2)=Q(\partial_k u_1,u_2)+Q(u_1,\partial_k u_2)$, 由对称性，这个估计来自于

$$\|Q(\partial_k u_1,u_2)\|_{L^2(\mathbb{R}^{1+3})}\le C\|f_1\|_{H^2}\|f_2\|_{H^2},\ k=0,1,2,3.$$

为记号方便, 我们仅说明 $k=0$ 时这个不等式成立。其余情形来自于同样的讨论。

将 $u_j(t,x)$ 写成 $(u_j^+(t,x)+u_j^-(t,x))/2$, 其中

$$u_j^{\pm}(t,x)=(2\pi)^{-3}\int_{\mathbb{R}^3}e^{ix\cdot\xi\pm it|\xi|}\hat{f}_j(\xi)\mathrm{d}\xi.$$

因此 $Q(\partial_t u_1,u_2)$ 是四项 $Q(\partial_t u_1^{\pm},u_2^{\pm})/4$ 的和。这样, 只要证明

$$\|Q(\partial_t u_1^+,u_2^+)\|_{L^2(\mathbb{R}^{1+3})}+\|Q(\partial_t u_1^+,u_2^-)\|_{L^2(\mathbb{R}^{1+3})}\le C\|f_1\|_{H^2}\|f_2\|_{H^2}. \tag{4.4.14}$$

先看第一项

$$Q_0(\partial_t u_1^+,u_2^+)=(2\pi)^{-6}\int\int e^{ix(\xi+\eta)+it(|\xi|+|\eta|)}i|\xi|q_0(\xi,\eta)\hat{f}_1(\xi)\hat{f}_2(\eta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta,$$

其中 $q_0(\xi,\eta)=\xi\cdot\eta-|\xi||\eta|$,

$$Q_{ij}(\partial_t u_1^+,u_2^+)=(2\pi)^{-6}\int\int e^{ix(\xi+\eta)+it(|\xi|+|\eta|)}i|\xi|q_{ij}(\xi,\eta)\hat{f}_1(\xi)\hat{f}_2(\eta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta,$$

其中

$$q_{ij}(\xi,\eta)=\begin{cases}-(\xi_i\eta_j-\xi_j\eta_i), & 1\le i<j\le 3,\\ -(|\xi|\eta_j-|\eta|\xi_j), & 0=i<j\le 3.\end{cases}$$

重要的是如果 q 是 q_0 或 q_{ij} 中的一个, 则存在某个常数 C 使得

$$|q(\xi,\eta)|\le C|\xi||\eta||\frac{\xi}{|\xi|}-\frac{\eta}{|\eta|}|$$

成立。这就允许我们如同在限制定理的证明中作坐标变换, 吸收出现的 Jacobian, 即引入极坐标 $\eta=\rho w,\rho>0,w\in S^2$, 则

$$\|Q(\partial_t u_1^+,u_2^+)\|_{L^2(\mathbb{R}^{1+3})}\le\int_{S^2}\|T_w^+(f_1,f_2)(t,x)\|_{L^2(\mathbb{R}^{1+3})}\mathrm{d}\sigma(w), \tag{4.4.15}$$

其中

$$T_w^+(f_1,f_2)(t,x)=\int\int e^{ix(\xi+\rho w)+it(|\xi|+\rho)}|\xi|^2\hat{f}_1(\xi)\rho\hat{f}_2(\rho w)q(\xi/|\xi|,w)\mathrm{d}\xi\rho^2\mathrm{d}\rho.$$

对固定的 w, 作坐标变换 $(\tau,\zeta)=(|\xi|+\rho,\xi+\rho w)$, 则存在某个 $c>0$ 使得 Jacobian 行列式满足 $|\mathrm{d}(\tau,\zeta)/\mathrm{d}(\rho,\xi)|=|1-w\frac{\xi}{|\xi|}|\ge c|w-\frac{\xi}{|\xi|}|^2$。这样, 由 Plancherel 定理

$$\begin{aligned}\|T_w^+(f_1,f_2)\|_{L^2}^2 &\le C\int\int||\xi|^2\hat{f}_1(\xi)\rho^3\hat{f}_2(\rho w)q(\frac{\xi}{|\xi|},w)\left|\frac{\mathrm{d}(\tau,\xi)}{\mathrm{d}(\rho,\xi)}\right|^{-1}|^2\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\zeta\\ &=\int\int||\xi|^2\hat{f}_1(\xi)\rho^3\hat{f}_2(\rho w)q(\frac{\xi}{|\xi|},w)\left|\frac{\mathrm{d}(\tau,\zeta)}{\mathrm{d}(\rho,\xi)}\right|^{-1/2}|^2\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\xi\end{aligned}$$

$$\leq \quad C\int\int|\rho^2\hat{f}_2(\rho w)|\xi|^2\hat{f}_1(\xi)|^2\rho^2\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\xi,$$

最后一步来自 $|q(\xi/|\xi|,w)|\left|\frac{\mathrm{d}(\tau,\zeta)}{\mathrm{d}(\rho,\xi)}\right|^{-1/2}\leq C$。因此由 (4.4.15), 得

$$\begin{aligned}\|Q(\partial_t u_1^+,u_2^+)\|_{L^2}^2 &\leq \int\int|\rho^2\hat{f}_2(\rho w)|\xi|^2\hat{f}_1(\xi)|^2\rho^2\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\sigma(w)\mathrm{d}\xi\\ &= C(2\pi)^{-6}\|f_1\|_{\dot{H}^2}^2\|f_2\|_{\dot{H}^2}^2\leq C(2\pi)^{-6}\|f_1\|_{H^2}^2\|f_2\|_{H^2}^2.\end{aligned}$$

对于 $Q(\partial_t u_1^+,u_2^-)$ 是类似的，这时 (4.4.15) 中的 T_w^+ 就成为 T_w^-。

$$T_w^-(f_1,f_2)=\int\int e^{ix(\xi+\rho w)+it(|\xi|-\rho)}|\xi|^2\hat{f}_1(\xi)\rho\hat{f}_2(\rho w)\tilde{q}(\xi/|\xi|,w)\mathrm{d}\xi\rho^2\mathrm{d}\rho,$$

$$|\tilde{q}(\xi,\eta)|\leq C|\xi||\eta||\frac{\xi}{|\xi|}+\frac{\eta}{|\eta|}|.$$

这样, 如果对固定的 w, 作变换 $(\tau,\zeta)=(|\xi|-\rho,\xi+\rho w)$, 则上面的讨论说明 T_w^- 满足与 T_w^+ 相同的估计，这是由于 $|\mathrm{d}(\tau,\zeta)/\mathrm{d}(\rho,\xi)|^{-1/2}\tilde{q}(\xi/|\xi|,w)\leq C$。这就完成了 (4.4.11) 当 $|\alpha|=1$ 时的证明。

为完成证明，我们仍需说明 $Q(u_1,u_2)$ 的 L^2 范数能由 (4.4.11) 的右边控制, 但如果记 u_j 如上, 上面的讨论给出

$$\|Q(u_1,u_2)\|_{L^2(\mathbb{R}^{1+3})}\leq C\|f_1\|_{\dot{H}^2}\|f_2\|_{\dot{H}^2}\leq C\|f_1\|_{H^2}\|f_2\|_{H^2},$$

这样我们能用处理其梯度的讨论方式来得到 Q 的 L^2 范数的估计。

定理 4.4.1 的证明 我们将仅证明存在性部分，唯一性来自于类似的讨论。为处理存在性, 我们记 (4.4.7) 的右边为 $F(u,u')$, 其中的分量 F^I 是形如 $\Gamma(u)Q(u^J,u^K)$ 的线性组合，这里的 Q 是零形式，$\Gamma\in C^\infty$。令 $u_{-1}\equiv 0$ 定义 $u_m,m=0,1,2,\cdots$，如下

$$\begin{cases}\Box u_m=F(u_{m-1},u'_{m-1}),\\ u_m(0,x)=f(x),\ \partial_t u_m(0,x)=g(x).\end{cases}$$

断言：如果 $T>0$ 充分小, C_0 充分大, 则

$$\sum_{|\alpha|\leq 1}\|\partial^\alpha(F(u_m,u'_m)-F(u_{m-1},u'_{m-1}))\|_{L^2([0,T]\times\mathbb{R}^3)}\leq C_0 2^{-m},\ m=0,1,2\cdots \tag{4.4.16}$$

由于 $\Box u_0=0$, 由 定理 4.4.2 和关于初值的假设，这个不等式对 $m=0$ 存在 C_0 使之成立。我们继而断定: 如果 T 小, (4.4.16) 对同样的常数成立。

如果这断定成立，由达朗贝尔能量不等式, 有

$$\sum_{|\alpha|\leq 2}\|\partial^\alpha(u_{m+1}(t,\cdot)-u_m(t,\cdot))\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\leq C_0 2^{-m},\ m=0,1,\cdots, \tag{4.4.17}$$

对小的 T(如 $T<1$) 成立。由于 $\Box u_0=0$, 我们关于初值的假设意味着: 如果 $|\alpha|\le 2$ 且 $0<t<1$, 则有 $\|\partial^\alpha u_0(t,\cdot)\|_{L^2}\le C$ 成立。因此, 必存在一个绝对常数 C_1 使得: 如果 (4.4.17) 对 u_m 成立, $n\le m$, 则

$$\sum_{|\alpha|\le 2}\|\partial^\alpha u_{m+1}(t,\cdot)\|_{L^2}\le C_1,\ 0\le t\le T. \tag{4.4.18}$$

由 Sobolev 不等式得

$$|u_{m+1}(t,x)|\le C_1',\ (t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^3 \tag{4.4.19}$$

成立。

由 (4.4.16) 和 (4.4.17), u_m 在 $L^\infty([0,T];H^2)\cap C^{0,1}([0,T];H^1)$ 中收敛于 (4.4.7) 的解 u。由于 (4.4.16) 意味着 $F(u,u')\in L^1([0,T];H^1)$, 线性方程解的存在性定理意味着 (4.4.8) 必成立。为了看到 (4.4.9) 也成立, 我们需要

$$\sum_{|\alpha|\le 1}\|\partial^\alpha(Q(u_m^J,u_m^K)-Q(u_{m-1}^J,u_{m-1}^K))\|_{L^2([0,T]\times\mathbb{R}^3)}\le C2^{-m} \tag{4.4.20}$$

成立, 其中 Q 是一个零形式。

设 (4.4.16) 当一个给定的 $m\ge 1$ 由 $n<m$ 来代时成立, 我们要说明: 如果 T 充分小, 则 (4.4.16) 成立。为此, 我们注意到 L^2 范数中的第 I 个分量包含形如

$$\Gamma(u_{m-1})(Q(u_m^J,u_m^K)-Q(u_{m-1}^J,u_{m-1}^K))+(\Gamma(u_m)-\Gamma(u_{m-1}))Q(u_m^J,u_m^K)=I+II \tag{4.4.21}$$

的项的线性组合。

为估计第一项, 我们注意到第二个因子能写成 $Q(u_m^J-u_{m-1}^J,u_m^K)+Q(u_{m-1}^J,u_m^K-u_{m-1}^K)$。让我们先估计这里的前一项, 由于 u_{m-1} 是有界的, 如果下面的范数取在 $[0,T]\times\mathbb{R}^3$ 上, 则

$$\begin{aligned}&\sum_{|\alpha|\le 1}\|\partial^\alpha\Gamma(u_{m-1})Q(u_m^J-u_{m-1}^J,u_m^K)\|_{L^2} \\ &\le C\sum_{|\alpha|\le 1}\|\partial^\alpha Q(u_m^J-u_{m-1}^J,u_m^K)\|_{L^2}+\|\partial(\Gamma(u_{m-1}))Q(u_m^J-u_{m-1}^J,u_m^K)\|_{L^2}.\end{aligned} \tag{4.4.22}$$

应用 定理 4.4.2, Schwartz 不等式以及归纳假设不等式 (4.4.17) 对任何 $n<m$ 成立, 我们可得右边的第一项由下式控制,

$$\begin{aligned}&\int_0^T\sum_{|\alpha|\le 1}\|\partial^\alpha(F(u_{m-1},u_{m-1}')-F(u_{m-2},u_{m-2}')\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\mathrm{d}t\\ &\quad\times\left(\|f\|_{H^2}+\|g\|_{H^1}+\int_0^T\sum_{|\alpha|\le 1}\|\partial^\alpha F(u_{m-1},u_{m-1}')\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\mathrm{d}t\right)\\ &\le\ CT^{1/2}C_0 2^{-(m-1)}.\end{aligned}$$

另一项可类似的估计, 首先用 Hölder 不等式, $|\partial\Gamma(u_{m-1})| \leq C|\partial u_{m-1}|$ 以及 Sobolev 不等式, 我们可得

$$
\begin{aligned}
&\sup_{0\leq t\leq T}\|\partial u_{m-1}(t,\cdot)\|_{L^4(\mathbb{R}^3)}\cdot\left(\int_0^T\|Q(u_m^J-u_{m-1},u_m^K)\|^2_{L^4(\mathbb{R}^3)}\mathrm{d}t\right)^{1/2}\\
\leq\ & C\sup_{0\leq t\leq T}\sum_{|\alpha|\leq 2}\|\partial^\alpha u_{m-1}(t,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\sum_{|\alpha|\leq 1}\|\partial^\alpha Q(u_m^J-u_{m-1}^J,u_m^K)\|_{L^2([0,T]\times\mathbb{R}^3)}.
\end{aligned}
$$

再利用 (4.4.18) 得上式右边的第一个因子可由 $O(1)$ 控制; 由上一步, 得另一项可由 $O(T^{1/2}2^{-(m-1)})$ 控制。

类似的讨论可用到 $\Gamma(u_{m-1})Q(u_{m-1}^J,u_m^K-u_{m-1}^K)$。如果 I 如同 (4.4.21) 我们有

$$
\sum_{|\alpha|\leq 1}\|\partial^\alpha I\|_{L^2([0,T]\times\mathbb{R}^3)}\leq CT^{1/2}C_02^{-(m-1)},
$$

其中 C_0 如同 (4.4.16)。

这些讨论也能用来讨论 (4.4.21) 中的另一项的估计。事实上, $\sum_{|\alpha|\leq 1}\|\partial^\alpha II\|_{L^2}$ 可由

$$
\begin{aligned}
&\|u_m-u_{m-1}\|_{L^\infty}\sum_{|\alpha|\leq 1}\|\partial^\alpha Q(u_m^J,u_m^K)\|_{L^2} \qquad (4.4.23)\\
&+\sup_{0\leq t\leq T}\sum_{|\alpha|\leq 1}\|\partial^\alpha(u_m(t,\cdot)-u_{m-1}(t,\cdot))\|_{L^4(\mathbb{R}^3)}\cdot\left(\int_0^T\|Q(u_m^J,u_m^K)\|^2_{L^4}\mathrm{d}t\right)^{1/2}
\end{aligned}
$$

来估计, 其中范数是取在 $[0,T]\times\mathbb{R}^3$ 中的。注意到由 Sobolev 定理和能量不等式

$$
\begin{aligned}
\|u_m-u_{m-1}\|_{L^\infty} &\leq C\sup_{0\leq t\leq T}\sum_{|\alpha|\leq 2}\|\partial^\alpha(u_m(t,\cdot)-u_{m-1}(t,\cdot))\|_{L^2}\\
&\leq C\sum_{|\alpha|\leq 1}\int_0^T\|\partial^\alpha(F(u_{m-1},u'_{m-1})-F(u_{m-2},u'_{m-2}))\|_{L^2}\mathrm{d}t\\
&\leq CT^{1/2}C_02^{-(m-1)}.
\end{aligned}
$$

由于由上一步 $\sum_{|\alpha|\leq 1}\|\partial^\alpha Q(u_m^J,u_m^K)\|_{L^2}=O(1)$, 我们得到 (4.4.23) 的第一项

$$
\leq C'T^{1/2}C_02^{-(m-1)},
$$

(4.4.23) 中的另一项能由同样的方式估计, 由 Sobolev 定理

$$
\leq C^1\sup_{0\leq t\leq T}\sum_{|\alpha|\leq 1}\|\partial^\alpha(u_m(t,\cdot)-u_{m-1}(t,\cdot))\|_{L^2}\sum_{|\alpha|\leq 1}\|\partial^\alpha Q(u_m^J,u_m^K)\|_{L^2}.
$$

这样 II 满足与 I 同样的界。这意味着如果 $CT^{1/2}<1/2$, 则

$$
\sum_{|\alpha|\leq 1}\|\partial^\alpha(F(u_m,u'_m)-F(u_{m-1},u'_{m-1}))\|_{L^2([0,T]\times\mathbb{R}^3)}\leq CT^{1/2}C_02^{-(m-1)}.
$$

这样, (4.4.16) 当然成立。

如果取 $\Gamma \equiv 1$, 我们看到就有 (4.4.20) 成立。这就完成了证明。

对于波映照型方程

$$\begin{cases} \Box u^I = \sum_{J,K=1}^N \Gamma_{J,K}^I(u) Q_0^I(u^J, u^K),\ I = 1, \cdots, N, \\ u(0,\cdot) = f,\ \partial_t u(0,\cdot) = g. \end{cases}$$

利用第三章的波 Sobolev 空间的双线性估计, 可以得到更好的结果:

定理 4.4.3 *如果 $n \geq 2$, $s > n/2$, 则上述波映照型方程的 Cauchy 问题在 $H^s \times H^{s-1}$ 中是局部适定的。*

这个定理的具体证明可参见 [33,39], 证明需用波 Sobolev 空间技术。

注意到波映照方程的 Sobolev 临界指标是 $n/2$, 上面的由 Klainerman, Machedon, Selberg 等证明的局部适定性结果是最优的。相应的 Besov 空间情形的结果是由 Tataru [63] 给出的。对于目标流形是 2 维的紧流形情形, H^1 弱解是整体存在的。最近, 陶哲轩对于齐次范数 $\dot{H}^{n/2}$ 小的 H^s 初值, $s > n/2$, 证明了 Cauchy 问题弱解的整体存在性。在一些特殊情形, 如径向对称等有一些更细致的结果。但仍有一些重要的问题未被解决。如目标流形是 $\mathbb{R}^3$ 中的球面的 2 维波映照其局部光滑解是否在有限时间产生奇性或等价地整体弱解的唯一性问题等。即使在等变对称初值的情形仍是未知的。这方面的详细内容可参见 Shatah 和 Struwe 的书 [53] 以及 Ancona 和 Georgiev 的文章 [1]。

第五章　经典解的破裂与奇性的形成

在得到偏微分方程定解问题的局部解之后，一个基本问题就是这样的解是否可以延展？即对于具有光滑初值的解随时间的演化是否会出现奇性或发生破裂？如果解会在有限时间内破裂，我们要知道何时何处破裂，是解本身破裂还是某导数破裂，以及一个破裂解是否在某种意义下可以作为一个弱解延拓等。在这一章我们主要介绍 F. John [24] 的一些关于经典解破裂的例子，以加深对波动方程的理解。

§5.1　半线性方程解的破裂

偏微分方程解的一种简单奇性就是解本身或其导数在有限时间 T^* 成为无穷，这样的解已经形成奇性且并不能被延拓，我们称这样的 T^* 为解的破裂时间。目前证明解的破裂的方法多数是将偏微分方程转化成解的某泛函的常微分不等式，但由此得到的多数破裂定义并不是真正的证明解的破裂，而是证明解在某时间后不存在。

例如考虑波动方程

$$\partial_t^2 u - \Delta u + f(u) = 0. \tag{5.1.1}$$

其非线性能量 E 可写成

$$E(u)(t) = \int_{\mathbb{R}^n} (\frac{1}{2}|\partial_t u|^2 + \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + F(u))\mathrm{d}x, \tag{5.1.2}$$

其中 $F(u) = \int_0^u f(u)\mathrm{d}u$。

定理 5.1.1 设 f 光滑且 $f(0)=0$。对所有的 $u \in \mathbb{R}$ 不等式

$$uf(u) \le (2+\varepsilon)F(u) \tag{5.1.3}$$

对某 $\varepsilon > 0$ 成立，则如果 u 是 (5.1.1) 满足紧支集初始条件的光滑解，且有 $E(u)(0) < 0$ 成立。那么这样的解 u 在有限时间内破裂。

注 5.1.1 如果取 $f(u) = m^2 u - |u|^{p-1}u$，则 (5.1.3) 对任何 $p > 1$ 成立。如果 $\int |u|^{p+1}\mathrm{d}x$ 控制 $\int(|\partial_t u|^2 + |\nabla u|^2 + m^2u^2)\mathrm{d}x$，能量 E 是负的。如果振幅选得非常小 (L^∞ 范数)，非线性项至少在 $f'(0) > 0$ 情形可由线性项来控制。这时 $E < 0$ 不能满足，我们将会知道这样的一个解可在 $p \ge 3$ 时不再破裂。然而随后的结论是说如果 $f'(0) = 0$，即使是小解也可以破裂。这也告诉我们阻尼可以阻止解的破裂的发生。

注 5.1.2 定理的条件 $E < 0$ 可以减弱成如果 $E \ge 0$，设

$$\int u\partial_t u \mathrm{d}x|_{t=0} > \left(2E\int u^2\mathrm{d}x|_{t=0}\right)^{1/2}$$

成立。

定理 5.1.1 **的证明**　注意到我们处理的是经典解，有 $E<0$ 是常数，且解是局部存在的。令 $I=\frac{1}{2}\int u^2\mathrm{d}x$。计算可得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2I}{\mathrm{d}t^2} &= (2+2\alpha)\int|\partial_t u|^2\mathrm{d}x+2\alpha\int|\nabla u|^2\mathrm{d}x\\&\quad+\int[(2+4\alpha)F(u)-uf(u)]\mathrm{d}x-(2+4\alpha)E.\end{aligned}$$

选取 $\alpha=\varepsilon/4$，由假设知后两项是正的。丢弃梯度项，用 I 乘之，然后用 Schwarz 不等式可得

$$I(I''+(2+4\alpha)E)>(1+\alpha)\int|\partial_t u|^2\mathrm{d}x\int u^2\mathrm{d}x\ge(1+\alpha)(I')^2.$$

令 $H(t)=I(t)-E(t+\tau)^2$，则 $HH''>(1+\alpha)(H')^2$。选取 τ 充分大使得 $H'(0)>0$，可得 $J=H^{-\alpha}$ 满足 $J''(t)<0$ 和 $J(0)>0, J'(0)<0$。因此 $J(t)\le J(0)+tJ'(0)<0$，这样存在一个 T 使得 $J(T)=0$，即若解直到 T 存在，则当 $t\nearrow T$ 时 $\int u^2\mathrm{d}x\to\infty$。

定理 5.1.2 *考虑方程*

$$\partial_t^2 u-\Delta u-|u|^p=0,$$

如果 $1<p\le\gamma(n-1)$，*其中* $\gamma(n)=\frac{1}{2}+\frac{1}{n}+\sqrt{(\frac{1}{2}+\frac{1}{n})^2+\frac{2}{n}}$ *是* $n(\gamma-1)/2=1+1/\gamma$ *的正根，则存在这样的解不论它所满足的* $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ *初值如何的小，它都不能整体存在。*

注 5.1.3 *这个定理的证明将依赖于波动方程解的表示。*$n=3,\gamma(2)=1+\sqrt{2}$，F.John *证明了所有* $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ *初值解均破裂；在其他维数情形定理的条件就分别成为* $n=1$，$1<p<\infty$；$n=2$，$1<p\le(3+\sqrt{17})/2$；$n=4$，$1<p\le 2$。*在一维情形，任何破裂解事实上在* t,x *平面的* C^1 *非特征曲线上成为无穷，在这条"破裂曲线"上* (5.1.3) *的解由常微分方程* $\partial_t^2 u=|u|^p$ *控制。常微分方程或许可以控制带有标准的非线性项* $f(u)=-|u|^{p-1}u$ *的波动方程解的破裂。作为一种方法的介绍，我们给出* Glassey *对* $n=3$ *情形的证明，且我们将会作更进一步的讨论。*

证明　对于任何满足 $\int u(x,0)\mathrm{d}x>0,\int\partial_t u(x,0)\mathrm{d}x>0$ 的 C_0^∞ 初值。设支集在 $\{|x|\le k\}$ 中，令 $J(t)=\int u\mathrm{d}x$，积分原方程得

$$J''=\int|u|^p\mathrm{d}x\ge J^p c(1+t)^{-3(p-1)},\tag{5.1.4}$$

这里我们用了 Hölder 不等式以及 u 的支集条件。另一方面，由方程以及基本解 $R\ge 0$ 我们有

$$u(t)=u_0(t)+\int_0^t R(t-\tau)*|u(\tau)|^p\mathrm{d}\tau\ge u_0(t),$$

其中 $u_0(t)$ 满足 $(\partial_t^2-\Delta)u_0=0, u_0(0)=u(0),\partial_t u_0=\partial_t u(0))$。由 $\partial_t^2\int u_0=0,\int u_0\mathrm{d}x=c_1+c_2t$。由假设知 $c_1,c_2>0$。此外，u_0 的支集在 $\{t-k\le|x|\le t+k\}=A$ 中。因此，由 Hölder 不等式，

$$c_1+c_2t=\int_A u_0\mathrm{d}x\le\int_A u\mathrm{d}x\le c(1+t)^{2(p-1)/p}\left(\int|u|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}.$$

这样由 (5.1.4), $J'' = \int |u|^p \mathrm{d}x \geq c(1+t)^{2-p}$。注意到 $J(0) > 0, J'(0) > 0$, 有

$$J \geq c(1+t)^{4-p}, \quad J' > 0. \tag{5.1.5}$$

组合 (5.1.4)(5.1.5) 可得，对于 $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned} J'' &\geq J^{1+\varepsilon} J^{p-1-\varepsilon} c(1+t)^{-3(p-1)} \\ &\geq J^{1+\varepsilon} c(1+t)^{(4-p)(p-1-\varepsilon)}(1+t)^{-3(p-1)} \\ &= J^{1+\varepsilon} c(1+t)^{-\mu}, \end{aligned}$$

其中 $\mu = (p-1)^2 + \varepsilon(4-p)$。由于 $1 < p < 1+\sqrt{2}$ 和 ε 小，有 $0 \leq \mu < 2$。用 $J' > 0$ 乘不等式得

$$(J')^2 \geq (J^{2+\varepsilon} c(1+t)^{-\mu}) + \text{正项}.$$

这样

$$J'(t) \geq (J^{2+\varepsilon} c(1+t)^{-\mu})^{1/2} = J^{1+\varepsilon/2} c(1+t)^{-\mu/2}.$$

进而有

$$J(t) \geq \left(\frac{\varepsilon}{2}\left(c_0 - c\int_0^t (1+\tau)^{-\mu/2} \mathrm{d}\tau\right)\right)^{-2/\varepsilon}.$$

这样存在一个时刻 T, 如果所考虑的解到那时依然存在，也有当 $t \nearrow T$ 时 $J(t) \longrightarrow +\infty$。

下面我们给出 F. John 对 $n = 3$ 时 $\Box u = u^2$ 的所有紧支集 C^∞ 初值解在有限时间破裂的一个证明。一个平凡的反例 $u(t,x) = 6(1+t)^{-2}$ 说明为了迫使 (5.1.6) 的解破裂，当 $|x|$ 大时对初值 f, g 的小性假设是必要的。或者说要保证解的破裂，初值的整体有界性是必要的。虽然是有限传播速度，初值在无限远处的性态在足够长的时间后可以影响到任何点。

定理 5.1.3 （**$n = 3$ 时 $\Box u = u^2$ 的解的破裂**） *设 $u(t,x)$ 是*

$$\Box u = u_{tt} - \Delta u = u^2 \tag{5.1.6}$$

在 $\{(t,x)|t > 0, x \in \mathbb{R}^3\}$ 中满足初始条件

$$u|_{t=0} = f(x), u_t|_{t=0} = g(x) \tag{5.1.7}$$

的一个解，其中 f 和 g 在 $\mathbb{R}^3$ 中有紧支集。则 $u \equiv 0$。

证明　设对于某个 σ, 当 $|x| > \sigma$ 时，

$$f(x) = g(x) = 0, \tag{5.1.8}$$

由唯一性定理在区域 $|x| > t + \sigma$ 中

$$u(t,x) = 0. \tag{5.1.9}$$

设 u 是一个非平凡解，则由同一个定理得知，对于 $|x| < \sigma$ 不能有

$$u(0,x) = u_t(0,x) = 0. \tag{5.1.10}$$

应用定理到 $v = u(\sigma - t, x)$, v 仍是 $\Box v = v^2$ 的一个解。我们看到对于 $|x| < 2\sigma$ 不能有

$$u(\sigma, x) = u_t(\sigma, x) = 0. \tag{5.1.11}$$

否则就意味着 (5.1.10)。

我们把微分方程 (5.1.6) 转化为一个关于球面平均函数

$$\overline{u}(t, r) = \frac{1}{4\pi} \int\int_{|\xi|=1} u(t, r\xi) \mathrm{d}w_\xi, \tag{5.1.12}$$

的积分不等式, $\overline{u}$ 为 r 的偶函数。令

$$w = u^2, \tag{5.1.13}$$

从 (5.4.13) 得到对于 $t \geq 0, r \in \mathbb{R}$,

$$(r\overline{u})_{tt} - (r\overline{u})_{rr} = r\overline{w} \tag{5.1.14}$$

成立。因此, 由 (5.4.14)

$$\overline{u}(t, r) = U(t, r) + V(t, r), \tag{5.1.15}$$

其中

$$U(t, r) = \frac{1}{2r}[(r+t)\overline{f}(r+t) + (r-t)\overline{f}(r-t) + \int_{r-t}^{r+t} \rho\overline{g}(\rho)\mathrm{d}\rho], \tag{5.1.16}$$

$$V(t, r) = \frac{1}{2r} \int\int_{R_{r,t}} \rho\overline{w}(\tau, \rho)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\rho, \tag{5.1.17}$$

$R_{r,t}$ 是 $\rho\tau$ 平面中的以 $(r, t), (r-t, 0), (r+t, 0)$ 为顶点的三角形。

我们应用这些公式到满足

$$0 < r < t - \sigma \tag{5.1.18}$$

的点 (r, t) 上, 由于支集在 $|\rho| \leq \sigma$ 上 $\rho\overline{f}(\rho)$ 和 $\rho\overline{g}(\rho)$ 是 ρ 的奇函数, 我们有

$$U(t, r) = 0. \tag{5.1.19}$$

此外, 由于 $\rho\overline{w}(\tau, \rho)$ 关于 ρ 是奇的,

$$\overline{u}(t, r) = V(t, r) = \frac{1}{2r} \int\int_{Z_{r,t}} \rho\overline{w}(\tau, \rho)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\rho, \tag{5.1.20}$$

其中 $Z_{r,t}$ 是由下式定义的。

$$Z_{r,t} = \{(\rho, \tau) : t - r < \tau + \rho < t + r, \tau - \rho < t - r, \tau > 0\}. \tag{5.1.21}$$

令 $r \to 0$, (5.1.20) 在 $t > \sigma$ 中趋于

$$\overline{u}(t, 0) = \int_0^t \rho\overline{w}(t - \rho, \rho)\mathrm{d}\rho. \tag{5.1.22}$$

作为推论，我们不能得到对所有满足 $\sigma < t < 3\sigma$ 的 t 成立

$$\overline{u}(t,0)=0. \tag{5.1.23}$$

事实上，由 (5.1.22) 和 $\overline{w} \geq 0$, (5.1.23) 意味着在 $\sigma < t+|x| < 3\sigma$ 中

$$u(t,x)=0. \tag{5.1.24}$$

特别地，(5.1.11) 成立，这是不可能的。这就推得存在一个 t_0 使得

$$\overline{u}(t_0,0) \neq 0; \sigma < t_0 < 3\sigma. \tag{5.1.25}$$

由于 $\overline{w}(t_0,0)=w(t_0,0)=u^2(t_0,0)=\bar{u}^2(t_0,0)>0$，我们有

$$\overline{w}(\tau,\rho)>\rho \tag{5.1.26}$$

在 $\tau=t_0, \rho=0$ 的一个邻域中成立。由 (5.1.20)，有

$$\overline{u}(t,r)>0 \text{ 对} t-r=t_0, r>0 \text{成立}. \tag{5.1.27}$$

$t=t_0, r=0$ 是 $Z_{r,t}$ 的一个顶点。

我们将进一步说明 $\overline{u}$ 的下界越来越大，最后证明 $\overline{u}$ 成为无穷。从 (5.4.21), (5.1.13) 我们得到

$$\overline{w}(t,r) \geq [\overline{u}(t,r)]^2. \tag{5.1.28}$$

我们引入区域

$$T=\{(\rho,\tau): 4\sigma<\rho+\tau<6\sigma, \sigma<\tau-\rho<3\sigma\}, \tag{5.1.29}$$

则

$$c=1/2\int\int_T \rho\overline{w}(\tau,\rho)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\rho>0. \tag{5.1.30}$$

这是因为在与 T 相交的射线 $\tau-\rho=t_0, \rho>0$ 的点上 $\overline{w}$ 是正的。设 S 是半带形

$$S=\{(\rho,\tau): 6\sigma<\tau+\rho, 3\sigma<\tau-\rho<4\sigma\}, \tag{5.1.31}$$

则对 $(r,t)\in S, T\subset Z_{r,t}$。随后由 (5.1.20), (5.1.30)

$$\bar{u}(t,r) \geq \frac{c}{r}, \text{ 对}(r,t)\in S. \tag{5.1.32}$$

下面我们设

$$0<r<t-6\sigma, \tag{5.1.33}$$

记 $S_{r,t}$ 为矩形

$$S_{r,t}=Z_{r,t}\cap S=\{(\rho,\tau): t-r<\tau+\rho<t+r, 3\sigma<\tau-\rho<4\sigma\}. \tag{5.1.34}$$

由 (5.1.20), (5.1.28), (5.1.32) 对 (5.1.33) 中的 (r,t) 我们有

$$\begin{aligned}\overline{u}(t,r) &\geq \frac{1}{2r}\int\int_{S_{r,t}}\rho\overline{u}^2(\tau,\rho)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\rho \quad (5.1.35)\\ &\geq \frac{c^2}{2r}\int\int_{S_{r,t}}\rho^{-1}\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\rho \quad (5.1.36)\\ &\geq \frac{c^2}{r}\int\int_{S_{r,t}}(t+r-3\sigma)^{-1}\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\rho \quad (5.1.37)\\ &= \frac{c^2\sigma}{t+r-3\sigma}\geq\frac{c^2}{t+r}. \quad (5.1.38)\end{aligned}$$

更一般地对于 (5.1.33) 中的 (r,t), 设 $\overline{u}(t,r)$ 满足不等式

$$\overline{u}(t,r)\geq\frac{C}{t+r}\frac{(t-r-6\sigma)^k}{(t-r)^q}, \tag{5.1.39}$$

其中常数 C,k,q 满足

$$C>0,k\geq 0,q\geq 0. \tag{5.1.40}$$

我们引入矩形

$$T_{r,t}=\{(\rho,\tau):t-r<\tau+\rho<t+r,6\sigma<\tau-\rho<t-r\}, \tag{5.1.41}$$

包含在 $Z_{r,t}$。应用 (5.1.20), (5.1.28), (5.1.39) 我们发现

$$\overline{u}(t,r)\geq\frac{C^2}{2r}\int\int_{T_{r,s}}\frac{\rho(\tau-\rho-6\sigma)^{2k}}{(\tau+\rho)^2(\tau-\rho)^{2q}}\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\rho. \tag{5.1.42}$$

用 $\alpha=\tau+\rho,\beta=\tau-\rho$ 作为积分变量, 注意到在 $T_{r,t}$ 中

$$\rho\geq 1/2(t-r-\beta),\beta\leq t-r,$$

我们发现

$$\begin{aligned}\overline{u}(t,r) &\geq \frac{C^2}{8r(t-r)^{2q}}\int_{t-r}^{t+r}\alpha^{-2}\mathrm{d}\alpha\int_{6\sigma}^{t-r}(t-r-\beta)(\beta-6\sigma)^{2k}\mathrm{d}\beta\\ &= \frac{C^2(t-r-6\sigma)^{2k+2}}{4(2k+1)(2k+2)(t+r)(t-r)^{2q+1}} \quad (5.1.43)\\ &\geq \frac{C^2}{4(2k+2)^2(t+r)}\frac{(t-r-6\sigma)^{2k+2}}{(t-r)^{2q+1}}.\end{aligned}$$

对 $j=0,1,2$ 我们由

$$C_0=c^2\sigma,k_0=q_0=0, \tag{5.1.44}$$

$$C_{j+1}=\frac{C_j^2}{4(2k_j+2)},k_{j+1}=2k_j+2,q_{j+1}=2q_j+1, \tag{5.1.45}$$

定义序列 C_j, k_j, q_j。

则由 (5.1.35), (5.1.43), 对于 $0 < r < t - 6\sigma$ 和所有 $j = 0, 1, 2 \cdots$

$$\overline{u}(t,r) \geq C_j(t+r)^{-1}(t-r-6\sigma)^{k_j}(t-r)^{-q_j} \tag{5.1.46}$$

解递推公式 (5.1.44), (5.1.45), 我们发现

$$k_j = 2^{j+1} - 2; q_j = 2^j - 1, \tag{5.1.47}$$

$$C_j = \exp[2^j(\log C_0 - \sum_{i=1}^{j} 2^{1-i}\log(2^{i+2}-4))]. \tag{5.1.48}$$

这样

$$\overline{u}(t,r) \geq \frac{t-r}{(t+r)(t-r-6\sigma)^2}\exp[2^j W_j],$$

其中

$$\begin{aligned} W_j &= \log C_0 + \log\frac{(t-r-6\sigma)^2}{t-r} - \sum_{i=1}^{j} 2^{1-i}\log(2^{i+2}-4) \\ &\geq \log C_0 + \log\frac{(t-r-6\sigma)^2}{t-r} - \sum_{i=1}^{\infty} 2^{1-i}\log(2^{i+2}-4) = W_\infty. \end{aligned} \tag{5.1.49}$$

显然，存在一个常数 γ 使得对 $t-r \geq \gamma, W_\infty > 0$。因此，当 $j \to \infty$ 时，对于 $t-r \geq \gamma, r \geq 0$, 我们有

$$\overline{u}(t,r) = \infty. \tag{5.1.50}$$

特别，

$$u(\gamma, 0) = \overline{u}(\gamma, 0) = \infty. \tag{5.1.51}$$

解 u 并不是整体的而有一个生命长度 $T \leq \gamma$, 与假设矛盾。

如果我们仅关心某些特解的破裂，我们可以用更简单的比较讨论，这可以仅利用初值的局部信息来获取结论。考虑 $\mathbb{R}^n, n \leq 3$ 中的方程 $\Box u = f(u)$ 以及初始条件 $u(0,x) = u_0(x), u_t(0,x) = u_1(x)$, 其中 f 非减。设对于 $|x| \leq T$, $u_1 \geq b$, b 是常数。还假设存在一个常数 a, 使得如果 $|x| \leq T$, 当 $n = 1, (n = 2, 3)$ 时 $u_0 \geq a$ $(u_0 = a)$。那么，我们可以推得以下情形的解在 T 之前就已经无界了：

(1) $b \geq 0$, 和 $\int_a^\infty \left(b^2 + \int_a^z f'(s)\mathrm{d}s\right)^{-1/2}\mathrm{d}z < T$。

(2) $b < 0$ 和 $\int_v^\infty \left(b^2 + \int_a^z f'(s)\mathrm{d}s\right)^{-1/2}\mathrm{d}z - \int_a^v \left(b^2 + \int_a^z f'(s)\mathrm{d}s\right)^{-1/2}\mathrm{d}z < T$, 其中 v 是方程 $b^2 + \int_a^z f'(s)\mathrm{d}s$ 的小于 a 的最大的根。简单地说常微分方程 $w_{tt} = f(w)$ 满足初值 (a, b) 的解在 T 之前已是无穷。如果我们能保证在 w 破裂的区域中成立 $u \geq w$, 则我们就得 u 必在 w 破裂之前破裂。

§5.2 形如 $u_{tt}=C^2(u_x)u_{xx}$ 方程的破裂

本节讨论一个空间变量的方程

$$u_{tt}-c^2(u_x)u_{xx}=0. \tag{5.2.1}$$

及 Cauchy 初值

$$u(0,x)=f(x), u_t(0,x)=g(x). \tag{5.2.2}$$

其中 c,f,g 是其变元的 C^∞ 的函数。另外假设

$$c(u_x)>0; c'(u_x)\neq 0, \tag{5.2.3}$$

以及对于 $|x|>\sigma$,

$$f(x)=g(x)=0. \tag{5.2.4}$$

设 $u(t,x)$ 是 (5.2.1) 的一个解, xt 平面中与之相联系的两族特征线分别定义为

$$\Gamma_\lambda^1:\begin{cases}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=c(u_x(t,x)) & \text{对} t\geq 0;\\ x=\lambda & \text{对于} t=0,\end{cases} \tag{5.2.5}$$

$$\Gamma_\mu^2:\begin{cases}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-c(u_x(t,x)) & \text{对} t\geq 0;\\ x=\mu & \text{对于} t=0.\end{cases} \tag{5.2.6}$$

考察 u_x 沿这些曲线的导数

$$w_1=u_{xt}-cu_{xx};\ w_2=u_{xt}+cu_{xx}. \tag{5.2.7}$$

容易验证, 沿 Γ_λ^1

$$\frac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}t}=w_2;\ \frac{\mathrm{d}w_1}{\mathrm{d}t}=\frac{c'}{2c}(w_1^2-w_1w_2), \tag{5.2.8}$$

而沿 Γ_μ^2

$$\frac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}t}=w_1;\frac{\mathrm{d}w_2}{\mathrm{d}t}=\frac{c'}{2c}(w_2^2-w_2w_1). \tag{5.2.9}$$

这些方程的形式说明, 如果在特征线 Γ_μ^2 的一个点处 $w_2=0$, 则沿整条 Γ_μ^2 上 $w_2=0$; 类似地如果在 Γ_λ^1 的一个点处 $w_1=0$, 则在整条 Γ_μ^1 上 $w_1=0$。设 $u(t,x)$ 在上半平面 $t\geq 0,-\infty<x<\infty$ 中整体存在。每族特征线覆盖这半平面。发自初值支集端点 $x=\pm\sigma$, $t=0$ 的特征线, 分这半平面为六部分。我们分别依次以反时针记五个无界的部分为 I, II, III, IV, V, 剩下的一部分记为 VI, (见图 5.1) 由 (5.2.8), (5.2.9) 和 (5.2.4), 在区域 I, III, V 中 $w_1=w_2=0$。因此在 I 和 V 中也有 $u_x=0$, 这样在 III 中 u_x 为常数。此外, 在 II 中 $w_2=0$, 在 IV 中 $w_1=0$。这样, 在五个无界区域的每一个中, u_x 满足某个形如

$$u_t+a(u)u_x=0$$

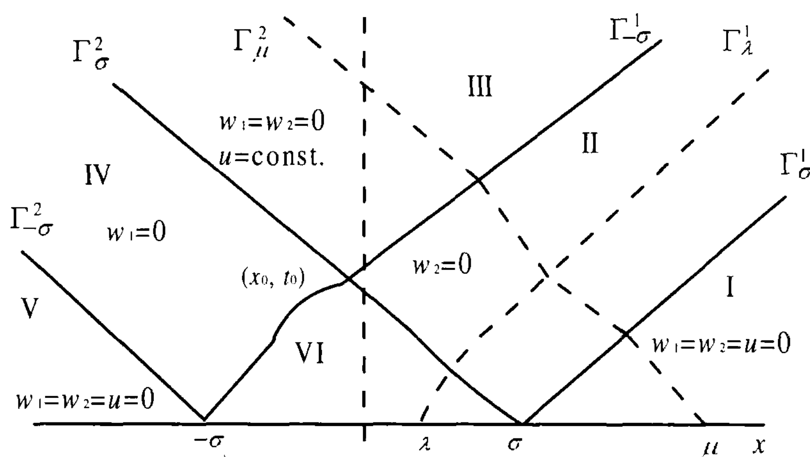


图 5.1

的 Burgers 方程。在 I 和 V 中, 特征 $\Gamma_\lambda^1, \Gamma_\mu^2$ 分别是 $x-c(0)t=\lambda, x+c(0)t=\mu$。

在区域 II 中, 沿着特征线 $\Gamma_\lambda^1, w_2=0, w_1=2u_{xt}$。由 (5.2.8)$u_x$ 为常数, 这意味着 $c'/c=$ 常数, 且由 (5.2.8) 有

$$\frac{\mathrm{d}u_{xt}}{\mathrm{d}t}=\frac{c'}{c}(u_{xt})^2. \tag{5.2.10}$$

因此, 除非沿所有 Γ_λ^1, $\frac{c'}{c}u_{xt}\le 0$, 在 II 中的 Γ_λ^1 的某点处 u_{xt} 成为无穷。由 (5.2.3)$\delta=\mathrm{sign}(c'/c)=\pm 1$ 处处由相同的值。这样, 在 II 中除非 $\delta u_{xt}\le 0$, 解的破裂发生。为阻止解的破裂在 IV 中同样的条件是需要的。

设 VI 的顶点坐标为 x_0, t_0, 即特征线 $\Gamma_{-\sigma}^1$ 和 Γ_σ^2 的交线。在任何固定的 $t\ge t_0$ 的直线上,

$$0=\int u_{xt}(t,x)\mathrm{d}x=\delta\int \delta u_{xt}(t,x)\mathrm{d}x. \tag{5.2.11}$$

由于在属于 III 部分的直线上 $\delta u_{xt}=0$, 在其余部分 $\delta u_{xt}\le 0$, 这就得到对 $t\ge t_0, u_{xt}(t,x)=0$。我们随后也发现对于 $t\ge t_0, u_{xt}=0$ 以及 $u_x=u_t=u=0$。让时间逆向我们也有对于 $0\le t<t_0, u=0$。这样我们得到如下的结论:

如果 $c(u_x)$ 满足 (5.2.3), 具紧支集初始条件的 (5.2.1) 的非平凡解 u 一定在有限时间内破裂。

注 5.2.1 如果初始条件有如下形式

$$u=f(x)=\varepsilon\phi(x),\ u_t=g(x)=\varepsilon\psi(x)\ 对 t=0, \tag{5.2.12}$$

其中 $\varepsilon>0, \phi, \psi\in C_0^\infty(\mathbb{R})$ 固定。解的破裂发生在 $1/\varepsilon$ 阶的时间 $t=T$。解的二阶导数在时刻 T 能为无穷, 而 u, u_x, u_t 仍然有限。

注 5.2.2 (5.2.1) 的平面波解 u 是在 u_t 和 u_x 之间存在一个函数关系的解。或在 u_tu_x 平面的图象 (u_t, u_x) 区域中退化为一维的解。在这个意义下, u 在每个区域 I, II, III, IV, V 中都是一个单波解。例如在 II 中, 我们有 $w_2=u_{tx}+cu_{xx}=0$,

这与 (5.2.1) 一起也意味着 $u_{tt}+cu_{xt}=0$。这样 u_t 和 u_x 的 Jacobian $u_{tt}-u_{xx}-u_{xt}^2$ 为零。更细致地，在 II 中，沿任何曲线 Γ_λ^1, u_t 和 u_x 为常数。这样，在 II 中，u_t 和 u_x 均依赖于单参数 λ。在区域 VI 中，u 一般不是单波，它的性态不甚了解。我们仅能说的是对 ε 小，解 u 接近于线性方程。具有相同初值 (5.2.12) 线性方程

$$u_{tt}-c^2(0)u_{xx}=0 \tag{5.2.13}$$

的解。

注 5.2.3 存在处处为单波的 (5.2.1) 的特解。例如，我们取 $w_2(t,x)=0$。这种情形当 $f'(x)+c(f'(x))f''(x)=0$ 时出现。在这种情形，在每条 Γ'_λ 上，$u_x=f'(\lambda), u_t=g(\lambda)$。随之有 Γ_λ^1 是直线

$$x=\lambda+c(f'(\lambda))t. \tag{5.2.14}$$

类似地 $g'(x)-c(g'(x))f''(x)=0$ 导致另一类型的单波解。

§5.3 $n=3$ 时 $u_{tt}=c^2(u_t)\Delta u$ 的径向解的破裂

考虑三个空间维数的方程

$$u_{tt}=c^2(u_t)\Delta u, \tag{5.3.1}$$

其中 $c\in C_0^\infty(\mathbb{R})$, 满足

$$c(0)=1, c'(0)=a\neq 0. \tag{5.3.2}$$

我们可以假设

$$a>0, \tag{5.3.3}$$

这只要用 $-u$ 来取代 u 就知这是合理的.

对 (5.3.1) 的一个径向解

$$u(t,x)=u(t,|x|)=u(t,r), \tag{5.3.4}$$

(5.3.1) 就成为

$$(ru)_{tt}=c^2(u_t)(ru)_{rr}. \tag{5.3.5}$$

由于 (5.3.3) 有球面对称性, 径向解来自于初始条件

$$u(0,r)=\varepsilon\phi(r), u_t(0,r)=\varepsilon\psi(r). \tag{5.3.6}$$

这里我们设 ϕ 和 ψ 是 r 的 C_0^∞ 函数, 且

$$\phi(r)=\psi(r)=0, \text{对}|r|>\sigma. \tag{5.3.7}$$

在 rt 平面中对应于 (5.3.5) 的解 $u(t,r)$ 的两族特征线分别定义为

$$\Gamma_\lambda^1: \begin{cases} \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = c(u_t), \\ r|_{t=0} = \lambda; \end{cases} \tag{5.3.8}$$

$$\Gamma_\mu^2: \begin{cases} \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = -c(u_t), \\ r|_{t=0} = \mu. \end{cases} \tag{5.3.9}$$

沿着特征线我们有 u 的两阶导数之间的某种组合关系, 在这里由于 (5.3.5) 中 r 的出现就有些复杂. 令

$$w_1 = \frac{1}{2c}[c(ru)_{rr} - (ru)_{rt}] = \frac{1}{2c}[r(cu_{rr} - u_{rt}) + 2cu_r - u_t], \tag{5.3.10}$$

$$w_2 = \frac{1}{2c}[c(ru)_{rr} + (ru)_{rt}] = \frac{1}{2c}[r(cu_{rr} + u_{rt}) + 2cu_r + u_t]. \tag{5.3.11}$$

沿特征线 Γ_λ^1

$$\frac{\mathrm{d}u_t}{\mathrm{d}t} = \frac{c}{r}(2cw_2 - u_t); \ \frac{\mathrm{d}w_1}{\mathrm{d}t} = \frac{c'}{2r}[2c(w_1^2 - w_1w_2) + u_t(3w_1 + w_2)]. \tag{5.3.12}$$

沿特征线 Γ_μ^2

$$\frac{\mathrm{d}u_t}{\mathrm{d}t} = \frac{c}{r}(2cw_1 + u_t); \ \frac{\mathrm{d}w_2}{\mathrm{d}t} = \frac{c'}{2r}[2c(w_2^2 - w_2w_1) - u_t(3w_2 + w_1)]. \tag{5.3.13}$$

由假设 (5.3.7) 对 $|r| > \sigma + t, u, w_1, w_2$ 为 0, 对于 $\lambda > \sigma, \Gamma_\lambda^1$ 就成为直线 $r - t = \lambda$, 对于 $\mu < -\sigma, \Gamma_\mu^2$ 就成为 $r + t = \mu$。

解的破裂时间的估计来自于 (5.3.12), (5.3.13)。在此仅作纲要性地介绍, 严格的证明可见 John 的文章 [28]。

我们首先注意到在初始阶段, u 接近于线性方程

$$(ru^0)_{tt} = (ru^0)_{rr} \tag{5.3.14}$$

具相同初值 (5.3.6) 的解

$$u^0(t,r) = \frac{\varepsilon}{2r}\left[(r+t)\phi(r+t) + (r-t)\phi(r-t) + \int_{r-t}^{r+t} \rho\psi(\rho)\mathrm{d}\rho\right]. \tag{5.3.15}$$

沿着 (5.3.14) 的一条特征 $r - t = \lambda$, 我们立刻可以验证

$$w_1^0 = 1/2[r(u_{rr}^0 - u_{rt}^0) + 2u_r^0 - u_t^0] = \varepsilon k(\lambda), \tag{5.3.16}$$

其中

$$k(\lambda) = 1/2[2\phi'(\lambda) + \lambda\phi''(\lambda) - \psi(\lambda) - \lambda\psi'(\lambda)]. \tag{5.3.17}$$

类似地在直线 $r+t=\mu$ 上

$$w_2^0 = 1/2[r(u_{rr}^0 + u_{rt}^0) + 2u_r^0 + u_t^0] = -\varepsilon k(-\mu). \tag{5.3.18}$$

由假设 (5.3.7) 函数 $\phi(\lambda), \psi(\lambda), k(\lambda)$ 对 $|\lambda| > \sigma$ 为零。令

$$k = \max_\lambda k(\lambda) = k(p). \tag{5.3.19}$$

显然，$k \geq 0$，但我们说对于非平凡的 ϕ, ψ，

$$k > 0. \tag{5.3.20}$$

如果 $k=0$ 意味着

$$0 \geq \int k(\lambda)\mathrm{d}\lambda = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}[\lambda\phi'(\lambda) + \phi(\lambda) - \lambda\psi(\lambda)]\mathrm{d}\lambda = 0, \tag{5.3.21}$$

随后就有

$$k(\lambda) = 0;\ k(\lambda) + k(-\lambda) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}[\lambda\psi(\lambda)] = 0;\ \psi(\lambda) = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}[\lambda\phi'(\lambda) + \phi(\lambda)] = 0; \phi(\lambda) = 0.$$

由 (5.3.16) 对大的 t，因此对大 $r+t$，沿直线 $r-t=\lambda$，有

$$w_1^0 = \varepsilon k(\lambda); w_2^0 = 0, \tag{5.3.22}$$

而由 (5.3.15)u_r^0 和 u_t^0 是 ε/t 阶的。因此，只要非线性可以忽略，沿着原来非线性方程的特征线 Γ_λ^1 我们能用含 w_1^2 的项来控制 (5.3.12) 的右端。在 Γ_λ^1 上对大的 t 也有 $1/r$ 接近于 $1/t$，以及 u_r 和 u_t 小，从而使得 $c \approx 1$, $c' \approx a$。代入非线性位相 (5.3.12) 中含 w_1^2 的项，对 $k(\lambda) > 0$ 是主要的。这意味着沿 Γ_λ^1

$$\frac{\mathrm{d}w_1}{\mathrm{d}t} \approx \frac{a}{t}w_1^2;\ w_1 \approx \varepsilon k(\lambda)\text{对有界的}t. \tag{5.3.23}$$

这就可导出

$$w_1 \approx \frac{\varepsilon k(\lambda)}{1 - \varepsilon a k(\lambda)\log t + o(\varepsilon)}. \tag{5.3.24}$$

因此，当接近于时间 $t = \exp(1/\varepsilon a k(\lambda))$ 时，在 Γ_λ^1 上，w_1 能成为无穷。在接近于 $\exp(1/\varepsilon aK)$ 的一个时刻，满足 $\lambda \sim p$ 的 Γ_λ^1 上破裂将是最早的。

一个严格的分析说明事实上对于 (5.3.1) 的径向解，生命区间 T 满足

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \log T \leq \frac{1}{aK}. \tag{5.3.25}$$

另一方面，我们还可以说明

$$\liminf_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \log T \geq \frac{1}{aK}. \tag{5.3.26}$$

这样，实际上

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \log T = \frac{1}{aK}. \tag{5.3.27}$$

因此，对于具有紧支集初值条件的 (5.3.1) 的径向解，对于小的 ε，其生命区间比平面波解大得多。

§5.4 $n=3$ 时 $\Box v = 2v_tv_{tt}$ 的解的破裂

设 $v=v(t,x)$ 满足方程

$$\Box v = v_{tt} - \Delta v = 2v_tv_{tt} \tag{5.4.1}$$

及初始条件

$$v(0,x)=f(x), v_t(0,x)=g(x),\ x\in\mathbb{R}^3. \tag{5.4.2}$$

(5.4.1) 是当 $c=(1-2v_t)^{-1/2}$ 时的 (5.3.1)。设 $f,g\in C_0^2(\mathbb{R}^3)$, 对$|x|>\sigma$ 满足

$$f(x)=g(x)=0. \tag{5.4.3}$$

定理 5.4.1 如果

$$L=\frac{1}{4\pi}\int\int\int_{R^3}[g(x)-g^2(x)]\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3>0, \tag{5.4.4}$$

则 (5.4.1), (5.4.2) 的解在有限时间内破裂。更精确地，当

$$\tau > 2\sigma\exp(\frac{16\sigma^3}{3L}) \tag{5.4.5}$$

时，不存在解 $v\in C^2([0,\tau)\times\mathbb{R}^3)$。

证明 证明要用 (5.4.1) 的球面对称性。这允许我们得到一个意味着破裂的球面平均不等式。由唯一性定理我们得到对于 $|x|>\sigma+t$,

$$v(t,x)=0. \tag{5.4.6}$$

令

$$u(t,x)=\int_0^t v(s,x)\mathrm{d}s. \tag{5.4.7}$$

显然, 对于 $|x|>\sigma+t$,

$$u(t,x)=0. \tag{5.4.8}$$

$$u(0,x)=0;\ u_t(0,x)=f(x), \tag{5.4.9}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}[\Box u-u_{tt}^2]=0. \tag{5.4.10}$$

因此,

$$\Box u = w(t,x), \tag{5.4.11}$$

其中

$$w(t,x)=u_{tt}^2(t,x)+h(x);\ h(x)=g(x)-g^2(x). \tag{5.4.12}$$

设一个 C^m 函数 $p(t,x)$ 在以原点为中心, r 为半径的球面上的平均为 $\overline{p}(t,r)$, 则 $\overline{p}(t,r)$ 关于 r 为 C^m 偶函数。

从 (5.4.11) 得

$$(r\overline{u})_{tt}-(r\overline{u})_{rr}=r\overline{w}. \tag{5.4.13}$$

求解得

$$\begin{aligned}\overline{u}(t,r) &= \frac{1}{2r}[(r+t)\overline{u}(0,r+t) \\ &+(r-t)\overline{u}(0,r-t)+\int_{r-t}^{r+t}\rho\overline{u}_t(0,\rho)\mathrm{d}\rho]+\frac{1}{2r}\int\int_{R_{r,t}}\rho\overline{w}(\tau,\rho)\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\tau,\end{aligned} \tag{5.4.14}$$

其中 $R_{r,t}$ 是 $\rho\tau$ 平面中以

$$(\rho,\tau)=(r,t),\ (r-t,0)\ (r+t,0) \tag{5.4.15}$$

为顶点的三角形。

应用 (5.4.15) 到满足

$$t=r+\sigma, r>\sigma \tag{5.4.16}$$

的点 (r,t)。则由 (5.4.9) 及偶函数的性质

$$\overline{u}(0,\rho);\int_{r-t}^{r+t}\rho\overline{u_t}(0,\rho)\mathrm{d}\rho=\int_{-\sigma}^{\sigma}\rho\overline{f}(\rho)\mathrm{d}\rho=0,$$

由于 $w(\tau,\rho)$ 是 ρ 的偶函数

$$\overline{u}(r+\sigma,r)=\frac{1}{2r}\int\int_{T_r}\rho\overline{w}(\tau,\rho)\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\tau, 对 r>\sigma. \tag{5.4.17}$$

其中 T_r 是 $\rho\tau$ 平面中以

$$(\rho,\tau)=(r,r+\sigma),(0,\sigma),(\sigma,0)(2r+\sigma,0) \tag{5.4.18}$$

为顶点的四边形。由 (5.4.12)

$$\overline{w}(\tau,\rho)=\overline{u}^2_{\tau\tau}(\tau,\rho)+\overline{h}(\rho). \tag{5.4.19}$$

由 (5.4.3), (5.4.4)

$$\int\int_{T_r}\rho\overline{h}(\rho)\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\tau=2\int_0^{\sigma}\rho^2\overline{h}(\rho)\mathrm{d}\rho=2L. \tag{5.4.20}$$

Cauchy 不等式应用到 $\bar{u}$ 得

$$\overline{u^2}\geq\overline{u}^2\geq 0. \tag{5.4.21}$$

所以，

$$\int\int_{T_r}\rho\overline{u^2_{\tau\tau}}(\tau,\rho)\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\tau \ \ \geq\ \ \int\int_{T_r}\rho\overline{u}^2_{\tau\tau}(\tau,\rho)\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\tau$$

$$\geq \int_\sigma^r \rho d\rho \int_{\rho-\sigma}^{\rho+\sigma} \overline{u}_{\tau\tau}^2(\tau,\rho)d\tau. \tag{5.4.22}$$

这是因为对于 $r > \sigma, T_r$ 包含以 $\rho = \sigma, \rho = r, \tau = \rho - \sigma$ 和 $\tau = \rho + \sigma$ 为边的平行四边形。由于对于 $\tau < \rho - \sigma, \overline{u}_{\tau\tau}(\tau,\rho)$ 为零，我们有

$$\overline{u}(\rho+\sigma,\rho) = \int_{\rho-\sigma}^{\rho+\sigma} (\rho+\sigma-\tau)\overline{u}_{\tau\tau}(\tau,\rho)d\tau, \tag{5.4.23}$$

这样由 Cauchy 不等式

$$\overline{u}^2(\rho+\sigma,\rho) \leq 8/3\sigma^3 \int_{\rho-\sigma}^{\rho+\sigma} \overline{u}_{\tau\tau}^2(\tau,\rho)d\tau. \tag{5.4.24}$$

令

$$\overline{u}(\rho+\sigma,\rho) = U(\rho), \tag{5.4.25}$$

从 (5.4.17) 我们最后得到不等式

$$U(r) \geq \frac{L}{r} + \frac{3}{16r\sigma^3}\int_\sigma^r \rho U^2(\rho)d\rho \text{对于} r > \sigma.$$

由 $L > 0$ 及 Gronwall 不等式

$$rU(r) \geq W(r), \tag{5.4.26}$$

其中 $W(r)$ 是积分方程

$$W(r) = L + \frac{3}{16\sigma^3}\int_\sigma^r \rho^{-1}W^2(\rho)d\rho \tag{5.4.27}$$

的解。求解 (5.4.27) 得

$$W(r) = L[1 - \frac{3}{16\sigma^3}L\log\frac{r}{\sigma}]^{-1}.$$

因此，对于

$$r = \sigma\exp(16\sigma^3/3L) \tag{5.4.28}$$

或对于

$$t = r + \sigma \leq 2\sigma\exp[16\sigma^3/3L],$$

$W(r)$ 不能有界。证毕!

注 5.4.1 稍加修改我们能证明当 $L = 0$ 时，(5.4.1),(5.4.2) 具紧支集初值的问题的非平凡解在有限时间内一定破裂。这样，非线性方程

$$\Box u = u_{tt}^2 \tag{5.4.29}$$

的具紧支集初值的每个非平凡解 u 必在有限时间内破裂。

因为 $v=u_t$ 将满足 (5.4.1) 及具紧支集的初始条件,

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{4\pi}\int\int\int[v_t(0,x)-v_t^2(0,x)]\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3 \\ &= \frac{1}{4\pi}\int\int\int[u_{tt}(0,x)-u_{tt}^2(0,x)]\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3 \\ &= \frac{1}{4\pi}\int\int\int\Delta u(0,x)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3. \end{aligned} \tag{5.4.30}$$

注 5.4.2 定理的证明说明对于 $L>0$, (5.4.1), (5.4.2) 的一个解 v 在有限时间内破裂, 是因为函数 v 和它的积分 u 不能保持有界。这仍不能排除有 v 的二阶导数成为无穷, 而 v 及其一阶导数仍然有界的可能性。定理仅给出了生命区间的一个上界, 并没有其性态的信息。

我们能应用定理到 v 的初值满足

$$f(x)=\varepsilon\phi(x),\ g(x)=\varepsilon\psi(x) \tag{5.4.31}$$

的情形, 其中 $\varepsilon>0,\phi,\psi$ 固定, 且有紧支集在 $|x|<\sigma$ 中, 只要

$$M=\frac{1}{4\pi}\int\int\int_{R^3}\psi(x)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3>0 \tag{5.4.32}$$

对充分小的 $\varepsilon>0$, (5.4.4) 就能满足, 由 (5.4.5)v 的生命区间 T 满足

$$\limsup_{\varepsilon\to0}\varepsilon\log T\leq\frac{16\sigma^3}{3M} \tag{5.4.33}$$

我们能比较这个结果与前面给出的对径向解的结果。如果 ϕ 和 ψ 是支集在 $|r|<\sigma$ 中的 r 的偶函数, 则函数 $v(t,x)$ 是 (5.4.1) 的一个径向解。将方程写成 (5.3.1) 的形式, 我们有 $a=c'(0)=1$。由 (5.3.27) 则

$$\lim_{\varepsilon\to0}\varepsilon\log T=\frac{1}{K}, \tag{5.4.34}$$

其中 K 由 (5.3.17),(5.3.19) 给定。因此 (5.4.33) 和 (5.4.34) 仅在

$$M\leq\frac{16}{3}\sigma^3K \tag{5.4.35}$$

时一致, 事实上, 这个不等式来自于 K 和 M 的定义。因为由 (5.3.17), (5.3.19),

$$2K\geq k(\lambda)+k(-\lambda)=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\lambda\psi(\lambda). \tag{5.4.36}$$

这样对 $0\leq\lambda\leq\sigma$,

$$\lambda\psi(\lambda)=\lambda\psi(\lambda)-\sigma\psi(\sigma)\leq2K(\sigma-\lambda),$$

$$M=\int_0^\sigma\lambda^2\psi(\lambda)\mathrm{d}\lambda\leq2K\int_0^\sigma(\sigma\lambda-\lambda^2)\mathrm{d}\lambda=1/3\sigma^3K<16/3\sigma^3K.$$

则对 T 的上界 (5.4.33) 肯定不是在所有情形都是最佳的。此外, 假设 $M>0$ 对径向的破裂不是必要的。

第六章　具小振幅初值的非线性波动方程

小振幅解指的是时空中每点处的函数值接近于零的解。当人们考虑在一个给定状态附近扰动的许多物理问题时，就会对扰动方程的小振幅解的研究有兴趣。这样的问题的一个基本出发点就是如同第四章我们所见，人们相信小初值应该能延缓、阻止解的破裂的发生或能赢得足够的时间，使得解的线性性质逐点衰减性（弥散现象）起作用，从而当 $t\to\infty$ 时，非线性的效应得以消失。

从数量关系上来看，由于我们考虑的是小振幅解，非线性项 f 性态如何仅在 $u=0$ 附近是重要的。这样只要假设 f 在原点附近充分小，小振幅的假设仅用在当 $t\to\infty$ 时与解的渐近性态的关联之中。为解释这种联系，我们可设解的局部存在性所保证的存在时间 T 依赖于初值的某范数 $\|u(0)\|$，记所考虑初值问题的存在时间为 $T_1=T(\|u(0)\|)$。再以此为起点解之，得 $T_2=T(\|u(T_1)\|)$。以此类推得到一个存在时间序列 $0<T_1<T_2<\cdots$，如果这列 T_m 收敛于极限 $T^*\leq\infty$，我们得知解在 $[0,T^*)$ 中存在。如果我们预先可知道 $\|u(t)\|$ 是有界的，区间序列的大小并不收缩于 0，就可得到整体解。由小性的假设我们可知 T^* 充分大，但未必无穷。我们想要 $T^*=\infty$，就需要对解的渐近性态作出控制，也即对非线性项的增长性提出要求。例如我们考虑具 C_0^∞ 初值且在某范数意义下有小性的 $\mathbb{R}^n$ 中的方程 (5.1.1)。其中的 $f(u)=O(|u|^p)(u\to 0)$，满足 $f(0)=0, f'(0)=m^2>0$。如果 p 足够大使得 $f(u)$ 足够小。我们知道当 $t\to\infty$ 时方程 (5.1.1) 解的最快衰减率为 $O(t^{-d})$，当 $m>0$ 时 $d=n/2$，如果 $m=0$，则 $d=(n-1)/2$。这样非线性项 $f(u)=O(t^{-pd})$。注意到 u 的能量是由 $\|f(u)\|_{L^2}\leq C\|u\|_{L^\infty}^{p-1}\|u\|_{L^2}$ 关于时间的积分控制的。因此，有可能由 $O(t^{-d})^{p-1}\cdot O(t^0)$ 控制。如果 $d(p-1)>1$ 关于 t 可积，这样可得小振幅整体解的有可能的条件是：对于 Klein-Gordon 方程 $p>1+\frac{2}{n}$；对于波动方程 $p>1+\frac{2}{n-1}$。

设 L 是一个线性偏微分算子，人们在将方程 $Lu=f(u)$ 的一个局部解延拓至整体解时，或在寻找某种估计使得方程的整体解能得以保证时，我们通常利用方程

$$u(t)=u_{lin}+L^{-1}f(u), \tag{6.0.1}$$

其中的 L^{-1} 可以理解成 Duhamel 算子。但要从中得到所要求的范数的估计，我们要预先知道 u 的某些其他信息，如解关于相同范数或不同范数的其他估计等。如果它可以被某种范数估计，就可以通过积分方程得到更多这个解信息。不过在很多情形下这是一个困难的事，因为除了知道解的某种可能的连续性外，我们并不太有解的其他信息。但有一个简单的原理可以应用：为证明 u 满足另一个界，允许我们假设 u 满足某个界，只要在最后能说明一个比假设的界更强的界即可。这事实是数学归纳法的连续化，称之为**连续性方法**。当然，如果已知非线性项关于解在所要求的范数下是一种线性估计，则由 Gronwall 不等式即可得到一个存在时间与初值无关的局部存在性结论。

这样也就得到了整体解。在其他情形，我们也可以通过得到某个强制性的守恒量，或衰减估计，或利用线性解的色散或耗散效果来得到应有的估计。从而得到整体解。

对于经典的 H^s 解，我们将看到，如果能得到解在时空中的一致有界性，我们就能利用 Gronwall 不等式和局部存在性将解延拓至整体。所以解的 L^∞ 范数通常就可以作为经典解破裂发生与否的一种判定。

§6.1　非线性波动方程的小振幅解

这一节的目的是讨论非线性波动方程解的长时间存在性问题。如果初值具有紧支集以及充分小，我们说明在某种情形，前面得到的拟线性波动方程的局部解可以延拓到整体解。注意到 Sobolev 定理在局部存在性的证明中起了关键的作用，例如，当我们用 $\|u(t,\cdot)\|_{H^s}$, $s>n/2$, 来控制 $|u(t,x)|$ 时就是如此。为得到更好的定理，如同 定理 3.1.1 所叙述的那样，我们需要能反映线性解的衰减性更好的 Klainerman-Sobolev 不等式。由此，我们不难在某些情形把局部存在性定理的证明修改后得到整体结果。最直接的是高维情形，只要将 Klainerman-Sobolev 不等式取代 Sobolev 不等式于证明之中。更困难的情形是 $n=3$ 时，我们将要介绍由 Klainerman 和 Hörnander 给出的，应用广义的能量不等式对非齐次波动方程解作出估计。

这一节我们先在 $\mathbb{R}^{1+n}_+, n\geq 4$, 中证明拟线性方程的整体存在性定理，然后得到当 $n=3$ 时的 “几乎整体存在性”，在三个空间变量情形一般没有整体存在性。要在低维空间得到整体存在性，我们要对非线性项附加结构性条件，即 “零条件”。在这一节的随后几小节中我们将对它们作出一些讨论。

6.1.1　高维拟线性波动方程的整体解

我们考虑形如

$$\begin{cases} \sum_{j,k=0}^n g^{jk}(u')\partial_j\partial_k u = F(u'), \\ u(0,x)=\varepsilon f(x),\ \partial_t u(0,x)=\varepsilon g(x), \end{cases} \tag{6.1.1}$$

的方程的长时间存在性问题。将假设 F 和 $g^{jk}\in C^\infty$,(6.1.1) 的线性化是具上述初值的线性齐次波动方程。后者的意思是

$$\sum_{j,k=0}^n g^{jk}(0)\partial_j\partial_k=\Box, \tag{6.1.2}$$

和

$$F(0)=0,\ \mathrm{d}F(0)=0. \tag{6.1.3}$$

使得 $F(u')=O(|u'|^2)$, 如前 $u'=(\partial_0 u,\cdots\partial_n u)$ 记 u 的全梯度，我们将假设 (f,g) 是给定的具有紧支集的光滑函数。

我们的第一个结果是说如果维数足够大, ε 足够小, (6.1.1) 的解总是整体存在的：

定理 6.1.1 设 $n \geq 4, f, g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$。若 $\varepsilon > 0$ 充分小, 则 Cauchy 问题 (6.1.1) 总存在 C^∞ 整体解。

上面的紧支集的假设是需要的。若不然, 我们能从空间维数只是 1 的经典爆破结果构造一个 (6.1.1) 的 C^∞ 解, 该解在有限时间破裂。例如, 在 $\mathbb{R}_+^1 \times \mathbb{R}$ 中, 形如

$$\partial_t^2 u - c^2(\partial_x u)\partial_x^2 u = 0$$

的方程, 如果 c 是具有非零导数的正函数, 我们知道满足非平凡初值的解总在有限时间内破裂。

从这一点我们能看到, 通过考虑仅依赖于第一个空间变量的初值, 在没有紧支集的假设下定理不成立。另外, 初值的小性也是必要的。

证明 如前所述, 我们采用证明局部存在性的证明思想, 加连续性方法证之。与前不同的只是用 Klainerman-Sobolev 不等式取代 Sobolev 不等式.

我们知道, 对于给定的一个 $\varepsilon > 0$, 存在一个 $T > 0$ 使得 (6.1.1) 在 $[0, T] \times \mathbb{R}^n$ 上存在一个光滑解. 由 定理 4.2.2 我们进一步知道, 如果 ε 固定, 这样的 T 的集合是开的, 或解的最大存在时间区间是开的。因此, 我们必须说明如果 $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, ε_0 仅依赖于 f 和 g, 则 $[0, T^*) \times \mathbb{R}^n$ 上的 C^∞ 解 u 实际上能正则延拓到闭带形 $[0, T^*] \times \mathbb{R}^n$ 上。

由局部存在性定理可知, 我们的任务是等价于得到当 $|\alpha| \leq (n+6)/2$ 时 $\partial^\alpha u$ 在半开带形区域的逐点界。令 $A(t) = \sum_{|\alpha| \leq s} \|(\Gamma^\alpha u)'(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$, 我们只要证明对于 $\varepsilon > 0$ 小, $s \geq n+4$,

$$\sup_{0 \leq t < T_*} A(t) < \infty. \tag{6.1.4}$$

为了看到这一点, 注意到由 Klainerman-Sobolev 估计以及交换子 $[\partial_j, \Gamma]$ 或是 0 或是对某个 i 的 $\pm\partial_i$, 得

$$\begin{aligned}(1+t)^{\frac{n-1}{2}}(1+(t-|x|))^{1/2}|(\Gamma^\beta u)'(t,x)| &\leq C \sum_{|\alpha| \leq (n+2)/2} \|\Gamma^\alpha (\Gamma^\beta u)'(t, \cdot)\|_{L^2} \\ &\leq C' \sum_{|\alpha| \leq |\beta| + (n+2)/2} \|(\Gamma^\alpha u)'(t, \cdot)\|_{L^2}.\end{aligned}$$

这样,

$$|(\Gamma^\beta u)'(t,x)| \leq C(1+t)^{-\frac{n-1}{2}}(1+|t-|x||)^{-1/2} A(t),\ |\beta| \leq s - [(n+2)/2]. \tag{6.1.5}$$

由此及 u 的支集的性质可得, 如果 $|\beta| \leq s - [(n+2)/2]$,

$$|\Gamma^\beta u(t,x)| \leq C(1+t)^{-\frac{n-1}{2}}(1+|t-|x||)^{1/2} A(t).$$

由于在解的支集中满足 $t - |x| = O(t)$, 以及对于 $s \geq n+4$

$$s - [(n+2)/2] \geq [(n+6)/2],$$

我们得

$$\sup_{(t,x) \in [0,T^*) \times \mathbb{R}^n} \sum_{|\alpha| \leq (n+6)/2} |\partial^\alpha u(t,x)| < \infty.$$

为证 (6.1.4), 让我们固定 $s \geq n+4$, 设 A 足够大使得

$$A(0) \leq \frac{A\varepsilon}{16}. \tag{6.1.6}$$

由于 u 满足 (6.1.1), $A(0)$ 仅依赖于初值 (f,g), 因此, A 能选成与 ε 无关, 则我们断言: 如果 ε 足够小, 对于任意的 $T \in (0,T_*)$, 则如果 $0 \leq t \leq T$, 就有

$$A(t) \leq \frac{A\varepsilon}{2}. \tag{6.1.7}$$

记 $E = \{T \in [0,T_*) : A(t) \leq \frac{A\varepsilon}{2}, 对于 0 \leq t \leq T\}$, 由于对 $T=0$ 已经成立, 以及 $A(t) \in C([0,T])$。因此, 集合 E 是非空的且是 $[0,T_*)$ 中的相对闭集。这样如果我们能证明这也是相对开的, 则 E 就是整个区间 $[0,T^*)$。为此对于任意给定的 $T_0 \in E$, 由 $A(t)$ 的连续性, 存在 T 满足 $T_0 < T < T^*$, 使得

$$A(t) \leq A\varepsilon,\ t \in [0,T] \subset [0,T_*), \tag{6.1.8}$$

我们将证明, 如果 ε 充分小, (6.1.8) 意味着 (6.1.7).

为此, 再次用交换子的讨论, 我们总能将 $\Gamma^\alpha \partial_j$ 表示成形如 $\partial_k \Gamma^\beta$ 的项的线性组合, $|\beta| \leq |\alpha|$, 这是由于 $[\partial,\Gamma]$ 或为 0 或对某个 i 为 $\pm\partial_i$。这样, 由 (6.1.5)

$$|\Gamma^\alpha u'(t,x)| \leq CA\varepsilon/(1+t)^{\frac{n-1}{2}},\ 0 \leq t \leq T, 0 \leq |\alpha| \leq s - [(n+2)/2]. \tag{6.1.9}$$

因此, 如果 g_0^{jk} 记达朗贝尔的系数, 令 $r^{jk} = g_0^{jk} - g^{jk}(u')$。我们有

$$\sum |r^{jk}| \leq C^1 A\varepsilon/(1+t)^{\frac{n-1}{2}} \tag{6.1.10}$$

和

$$\sum \|\partial_i g^{jk}(t,\cdot)\|_{L^\infty} \leq C^1 A\varepsilon/(1+t)^{\frac{n-1}{2}}, 0 \leq t \leq T.$$

由于这最后的因子当 $n \geq 4$ 时可积的, 我们看到

$$\exp\Big(\int_0^T 2\sum \|\partial_i g^{jk}(t,\cdot)\|_{L^\infty} \mathrm{d}t\Big) \leq \exp\Big(\int_0^\infty C^1 A\varepsilon(1+t)^{-\frac{n-1}{2}} \mathrm{d}t\Big). \tag{6.1.11}$$

下面我们选取 $\varepsilon_0 > 0$ 使得, 当 $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ 时,(6.1.10) 和 (6.1.11) 的右边分别比 1/2 和 2 小。这样对于任意的 $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, 我们能通过第三章的能量不等式和方程

$$\begin{aligned} \sum g^{jk}(u')\partial_j\partial_k\Gamma^\alpha u &= \Gamma^\alpha \sum g^{jk}(u')\partial_j\partial_k u + [\Box,\Gamma^\alpha]u + [\sum r^{jk}(u')\partial_j\partial_k, \Gamma^\alpha]u \\ &= \Gamma^\alpha F(u') + [\Box,\Gamma^\alpha]u + \sum [r^{jk}(u'),\Gamma^\alpha]\partial_j\partial_k u + \sum r^{jk}(u')[\partial_j\partial_k,\Gamma^\alpha]u \end{aligned} \tag{6.1.12}$$

估计 $(\Gamma^\alpha u)'$ 的 L^2 范数, $|\alpha| \leq s$。

我们断言右边的每一项是形如

$$a(u')\Gamma^{\alpha_1}u' \cdots \Gamma^{\alpha_N}u',\ |\alpha_j| \leq |\alpha| \tag{6.1.13}$$

的线性组合, 其中至多一个 $|\alpha|$ 大于 $(s+1)/2$, 和

$$a(u') = O(\min\{|u'|^{2-N}, 1+|u'|\}), \tag{6.1.14}$$

当 $|u'|$ 小时, 这里的 $a(u') = O(1) = O(1+|u'|)$。更具体地, 当 $N=1$ 时, $a(u') = O(u') = O(1)$; 当 $N \geq 2$ 时, $a(u') = O(|u'|^{2-N})$。

注意到如果 $s \geq n+4$, 就有 $(s+1)/2 < s - [(n+2)/2])$。固定 $0 \leq t \leq T$, 对于 $N \geq 2$, 我们能估计 (6.1.13) 的 L^2 范数。事实上, 对于固定的 s, 用 (6.1.9) 去估计除了最高阶导数项外的 $\Gamma^{\alpha_j}u$ 的所有的逐点估计, 而留下的一项用 L^2 范数, 这就得到 (6.1.13) 的 L^2 范数

$$\leq C_A\varepsilon(1+t)^{-\frac{n-1}{2}}A(t),$$

其中的 C_A 只依赖于 A。如果 $N < 2$, 用 (6.1.14) 我们能得到同样的结论。

这样, 如果我们的断言成立, 则 (6.1.12) 的右端的 L^2 范数具有这个界。因此, 如果 $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0, 0 \leq t \leq T$, 由 命题 3.3.1 得到,

$$A(t) \leq 4A(0) + 4C_A\varepsilon\int_0^t (1+\tau)^{-\frac{n-1}{2}}A(\tau)\mathrm{d}\tau,$$

再由 Gronwall 不等式

$$A(t) \leq 4A(0)\exp\left(\int_0^t 4C_A\varepsilon(1+\tau)^{-\frac{n-1}{2}}\mathrm{d}\tau\right), \; 0 \leq t \leq T. \tag{6.1.15}$$

由于 $n \geq 4$ 时, $\int_0^\infty (1+\tau)^{-\frac{n-1}{2}}\mathrm{d}\tau < \infty$, 选取 $\varepsilon_0 > 0$ 足够小, 可以假设 (6.1.15) 的最后因子当 $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ 时 ≤ 2, 由 (6.1.6) 就有 (6.1.7)。

我们仅用包括非常类似的与局部存在性定理的证明中用过的讨论即可验证断言。

事实上, 注意到 (6.1.12) 的右端的第一项能表示为形如

$$F^{(k)}(u')\Gamma^{\alpha_1}u'\cdots\Gamma^{\alpha_k}u'$$

的线性组合, 其中 $\sum|\alpha_j| \leq |\alpha| \leq s$。

因此, α_j 中至多一个有阶数大于 $s/2$。这样, 与 (6.1.3) 一起, 就说明 (6.1.12) 的右边的第一项与 (6.1.13) 中的相同。

这些讨论也说明 (6.1.12) 的第三项有这个形式。事实上, 它能表示成形如

$$(\partial^r r^{jk})(u')\Gamma^{\alpha_1}u'\cdots\Gamma^{\alpha_l}u'\Gamma^\beta\partial_k u$$

的线性组合, 其中 $|\alpha_1| > 0, |\alpha_1| + \cdots + |\alpha_l| + |\beta| \leq |\alpha| + 1 \leq s+1$。注意到在 $|\beta|, |\alpha_1|\cdots, |\alpha_l|$ 中至多有一个整数能比 $(s+1)/2$ 大, 即知断言的第三项成立。

容易验证断言的另两项成立。事实上, 由于 $[\partial_j\partial_k, \Gamma^\alpha]$ 总能表示成形如 $\Gamma^\beta\partial_i$, $|\beta| \leq |\alpha| \leq s$ 的项的线性组合, 且 $r^{jk}(0) = 0$, 这导致 (6.1.12) 的右边的最后一项能表示成当 $N = 1$ 时 (6.1.13) 的项的线性组合。为验证剩下的一项, 由 Poncaré 群的生成元与 $\Box$ 的可交换性, $[\Box, \Gamma^\alpha]$ 能表示成形如 $\Gamma^\beta\Box$ 的项的线性组合, $|\beta| < |\alpha|$。但 (6.1.1) 意味着

$$\Gamma^\beta\Box u = \Gamma^\beta F(u') - \Gamma^\beta\sum r^{jk}(u')\partial_j\partial_k u,$$

由于我们刚刚证实出现在右端的项如同 (6.1.13), 这就完成了断言的证明。

由于我们早就说明了断言就意味着 (6.1.7), 这就完成了定理的证明.

在低维情形没有整体存在性, 但有下面的结论成立。

定理 6.1.2 *存在一个常数 c, 仅依赖于 $(f,g)\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ 使得对小的 $\varepsilon>0$(6.1.1) 在 $0\le t\le T_\varepsilon$ 上有一个光滑解, 其中*

$$\begin{cases} e^{c/\varepsilon}, & n=3,\\ (c/\varepsilon)^2, & n=2,\\ c/\varepsilon, & n=1. \end{cases} \tag{6.1.16}$$

$n=3$ 时的生命区间是 $1/\varepsilon$ 的指数型函数，我们称之为具有几乎整体存在性。这要归属于 John 和 Klainerman(1984)。

证明 我们只要用上一结果的证明。事实上, 如前, 通过应用局部存在性定理，我们看到只要证明, 如果 $\varepsilon>0$ 充分小, 则若 (6.1.1) 在 $[0,T_*)\times\mathbb{R}^n$ 中有一个 C^∞ 解, $T_*=T_*(\varepsilon)\le T_\varepsilon$, 则

$$\sum_{|\alpha|\le(n+6)/2}|\partial^\alpha u(t,x)|\in L^\infty([0,T_*)\times\mathbb{R}^n).$$

但这是 (6.1.4) 的一个推论。而 (6.1.4) 来自于说明：对于小的 $\varepsilon>0$ 如果人们假设 (6.1.8), 其中的 A 同 (6.1.6), 则 (6.1.7) 成立。

用与前面的证明相似的讨论, 我们可得 (6.1.15) 必成立, 因此 $0\le t\le T<T_*\le T_\varepsilon$,

$$\begin{aligned} A(t) &\le 4A(0)\exp(\int_0^t 4C_A\varepsilon(1+\tau)^{-\frac{n-1}{2}}\mathrm{d}\tau)\\ &\le \frac{A\varepsilon}{4}\exp(\int_0^t 4C_A\varepsilon(1+\tau)^{-\frac{n-1}{2}}\mathrm{d}\tau). \end{aligned} \tag{6.1.17}$$

注意到当 $1\le n\le 3$ 时, 已经选取的 T_ε 使得

$$\int_0^{T_\varepsilon}\varepsilon(1+\tau)^{-\frac{n-1}{2}}\mathrm{d}\tau\le C_n c,\ 0<\varepsilon<1,$$

其中 c 如同 (6.1.16)。因此, 如果 c 和 $\varepsilon>0$ 足够小, 我们有 (6.1.17) 的最后因子 ≤ 2。这意味着 (6.1.7) 成立。证毕!

一般说来, 上一定理中对 u 的生命区间的界的估计是最优的, 见 John 的文章 [24,27]。另一方面, 对于 $n=2$ 或 $n=3$, 如果 (6.1.1) 与高阶线性 Cauchy 问题一致, 我们仍能说明对小初值的整体解的存在性。事实上，如果 (6.1.2) 和 (6.1.3) 分别由

$$\partial^m r^{jk}(0)=0,\forall j,k,\ \ 0\le m\le\kappa-1, \tag{6.1.18}$$

和

$$\partial^m F(0)=0,\ \ 0\le m\le\kappa, \tag{6.1.19}$$

取代, 则我们有下列结果:

定理 6.1.3 对于 $n=2$ 或 $n=3$, 以及给定的 $f,g\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, 若 $\varepsilon>0$ 充分小, 且 (6.1.18) 和 (6.1.19) 当 $n=3$ 时, $\kappa=2$; 当 $n=2$ 时, $\kappa=3$, 成立。则 (6.1.1) 有一个整体解。

定理的结论告诉我们, 如果方程分别是 $n=3$, 或 $n=2$ 时线性 Cauchy 问题的 3 阶或 4 阶扰动, 则具小初值的 (6.1.1) 存在整体解。这个结果的证明与 定理 6.1.1 的证明的主要不同是: 如果我们假设 (6.1.18) 和 (6.1.19), 则 (6.1.12) 的右边是形如 (6.1.13) 的项的线性组合, 其中第一个因子有更好的性态:

$$a(u')=O(\min\{|u'|^{\kappa+1-N},1+|u'|\}).$$

考虑到这一点, 对固定的 f , (6.1.12) 的右边有 L^2 范数

$$\leq C_A\varepsilon(1+t)^{-\frac{n-1}{2}\kappa}A(t).$$

这样,(6.1.15) 能由

$$A(t)\leq 4A(0)\exp(\int_0^t 4C_A\varepsilon(1+\tau)^{-\frac{n-1}{2}\kappa}\mathrm{d}\tau)$$

取代, 对 $\varepsilon>0$ 充分小, 由

$$\int_0^\infty(1+\tau)^{-\frac{n-1}{2}\kappa}\mathrm{d}\tau<\infty$$

导致 (6.1.7)。

如果非线性项也依赖于 u, 情况就会有戏剧性的变化。例如, 如果 (6.1.1) 的右端由 $F(u,u')$ 来取代, 并设 $F(0,0)$ 和 $\mathrm{d}F(0,0)$ 都为 0, 使得如在定理 6.1.1 中非线性仍是 2 次的, 则存在性的结果就大为不同。例如, $F=u^2$, 解的生命区间不再是 $O(\exp(c/\varepsilon^2))$, 而仅为 $O(\varepsilon^{-2})$。这是我们在上一章处理过 John [26] 的爆破结果的一部分。另一方面, 如果 $G(0,0,u'')=0,G$ 关于 u' 是二次的且关于 u 有 3 阶为 0。这样, 去掉非线性项关于 2 阶导数是线性的假设, $\Box u=G(u,u',u'')$ 当 $n=3$ 时存在一个整体解 (这是由 Linlblad 和 Sogge [43] 最近得到的)。

再有如果 $F=u^2$, 则当 $n=4$ 时对小初值不再有整体存在性的结果, 见 Sideris [54] 和 Zhou [69]。然而, 如果 $n\geq 5$, 则 $\Box u=u^2$ 存在整体解, 见 Klainerman 的文章 [31]。

6.1.2 零条件和三维波动方程的整体解

在上一小节我们看到, 当 $n\geq 4$ 时形如 (6.1.1) 的方程存在整体解。而当 $n=3$ 时, 由于这时的衰减因子 $(1+t)^{-1}$ 不再可积, 所以如前的证明就行不通。但这并不只是证明方法的问题。事实上, 当 $n=3$ 时, 具紧支集初值的下述方程

$$\Box u=(\partial_t u)^2 \tag{6.1.20}$$

的每个非平凡的 C^3 解在有限时间内破裂, 见 John [27]。

另一方面, Nirenberg 给出了看起来相似的方程

$$\Box u=(\partial_t u)^2-\sum_{j=1}^{3}(\partial_j u)^2, \tag{6.1.21}$$

如果初值在 C_0^∞ 中且充分小，则该问题总有一个 C^∞ 整体解。原因在于作一个替换 $v=1-e^{-u}$, 这个非线性 Cauchy 问题 (6.1.21) 就能变为线性 Cauchy 问题

$$\Box v=0,\ v(0,x)=1-e^{-u(0,x)},\ \partial_t v(0,x)=\partial_t u(0,x)\mathrm{e}^{-u(0,x)}.$$

由于 $u=-\log(1-v)$, 我们得到如果 $v(t,x)<1$,(6.1.21) 有一个整体解。在 $\varepsilon>0$ 充分小的情形, 对于 $u(0,x)=\varepsilon f(x)$, $\partial_t u(0,x)=\varepsilon g(x)$, $f,g\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ 固定, 应用公式 (3.1.5) 即可得结论成立。

从这两个例子, 我们得到一个结论：当 $n=3$ 时想要有定理 6.1.1 方式的结论，仅对某些类型的非线性项是允许的。为了叙述的方便，我们将主要集中在讨论形如 $\Box u=F(u,u')$ 的方程上。正如我们将看到的, 现在要考虑的情形包括来自于几何问题的所谓的波映照。由上面的讨论, 如果我们要整体存在性的结果，我们就需要对非线性的二次部分作某种假设，考虑具零形式的非线性。在这个假设下，我们有下面的定理。

定理 6.1.4 *设 $n=3$, F 满足形如定义 4.4.1 的零条件，则对于给定的 $f,g\in C_0^\infty(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^N)$, 如果 $\varepsilon>0$ 充分小, (4.4.1) 总有一个整体解。*

这个结论对满足适当零条件的形如 $\Box u=F(u,u',u'')$ 的方程也成立。然而，我们现在仅考虑形如 (4.4.1) 的方程，对于更一般的方程的结论我们在稍后给出，其证明仅来自于上述定理的证明的修改，详细的讨论可参见 Christodoulon 和 Klainerman 的文章 [6, 33]。

定理 6.1.4 的证明中, 我们将看到通过应用定理 3.6.10 和线性方程解的衰减性可以得到 $\Gamma^\alpha u=O((1+|(t,x)|))^{-1}$。有了这个估计, 注意到 (4.4.1) 中的二次形式的特殊性, 下面的关键引理将允许我们得到它们的性态像它们的时间衰减项的 3 次误差的项。

引理 6.1.1 *设 Q 是 (4.4.4)-(4.4.5) 中的一个零形式，则如果 $t>0$,*

$$|Q(v,w)(t,x)|\le\frac{c}{1+t+|x|}\sum_{|\alpha|=1}|\Gamma^\alpha v(t,x)|\sum_{|\alpha|=1}|\Gamma^\alpha w(t,x)|.$$

证明 我们仅需考虑 $t+|x|>1$ 的情形, 由于其他情形是平凡的, 如果 $1\le i<j\le 3$, 通过演算即可得到

$$Q_{ij}(v,w)=t^{-1}[\partial_t v\Omega_{ij}w+\Omega_{0i}v\partial_j w-\Omega_{0j}v\partial_i w],$$

如果 $t>|x|$, 则显然有结论成立。对另外的情形，我们需要用

$$\partial_i=\sum_{j=1}^{3}\frac{x_ix_j}{|x|^2}\partial_j+\sum_{j=1}^{3}\frac{x_j\Omega_{ij}}{|x|^2},\ 1\le i\le 3.$$

如果 $A_i = \sum_{j=1}^{3} x_j\Omega_{ij}/|x|$, 这就得到

$$Q_{ij}(v,w) = |x|^{-1}[\partial_r v\Omega_{ji}w + A_i v\partial_j w - A_j v\partial_i w].$$

因此, 对 Q_{ij} 的有界性成立, $1 \le i < j \le 3$。

对于 $i = 0, j \ge 1$, 我们将 Q_{0j} 写成

$$Q_{0j}(v,w) = t^{-1}(\partial_t v\Omega_{0j}w - \partial_t w\Omega_{0j}v),$$

就可得到当 $t > |x|$ 时所要求的界。对于另外情形我们用

$$Q_{0j}(v,w) = |x|^{-1}[\frac{x_j}{|x|}(\Omega_r v\partial_r w - \partial_r v\Omega_r w) + (\partial_t v A_j w - A_j v\partial_t w)],$$

其中 A_j 如上, $\Omega_r = |x|^{-1}\sum_{j=1}^{3} x_j\Omega_{0j} = t\partial_r + r\partial_t$。为处理剩下的零形式, 我们只要将 $Q_0(v,w)$ 写成

$$Q_0(v,w) = t^{-1}[\partial_t vL_0 w - \sum_{i=1}^{3}\Omega_{0i}v\partial_i w] = |x|^{-1}[(\Omega_r v\partial_t w - \partial_r vL_0 w) - \sum_{i=1}^{3}\partial_i vA_i w],$$

这就可得到所要求的界。

有了上面引理的结论, 我们就可知道在不变向量场的作用下 $F_0(u')$ 的界。事实上, 由 (4.4.6), 容易得到对于不变向量场 Γ 在零形式 Q 的作用为

$$\Gamma Q(v,w) = Q(\Gamma v,w) + Q(v,\Gamma w),$$

为此, 引入交换子

$$[\Gamma,Q](v,w) = \Gamma Q(v,w) - Q(\Gamma v,w) - Q(v,\Gamma w).$$

显然, 如果 $\Gamma = \partial_j$, 交换子是 0, 另一方面, 用不变向量场的交换关系, 我们容易验证

$$\begin{gathered}[\Omega_{jk},Q_0] = [L_0,Q_{jk}] = 0,\ 0 \le j < k \le 3,\\ [L_0,Q_0] = -2Q_0, \\ [\Omega_{jk},Q_{ab}] = \delta_{aj}Q_{bk} - \delta_{ak}Q_{bj} - \delta_{bj}Q_{ak} + \delta_{bk}Q_{aj}.\end{gathered} \tag{6.1.22}$$

使用 (6.1.22) 和 引理 6.1.1 我们得到下面的重要结果。

命题 6.1.1 设 Q 是一个零形式, 则对于 $t > 0$, 成立

$$\begin{aligned}&(1+t+|x|)\sum_{|\alpha|\le M}|\Gamma^\alpha Q(v,w)|\\ \le\ & C_M\sum_{1\le|\alpha|\le M+1}|\Gamma^\alpha v|\cdot\sum_{1\le|\alpha|\le\frac{M+2}{2}}|\Gamma^\alpha w| + C_M\sum_{1\le|\alpha|\le M+1}|\Gamma^\alpha w|\cdot\sum_{1\le|\alpha|\le\frac{M+2}{2}}|\Gamma^\alpha v|.\end{aligned}$$

因此，如果 $F(u,u')$ 满足零条件，且其二次部分 F_0 如同 (4.4.3) 定义，则

$$\sum_{|\alpha|\le M}|\Gamma^\alpha F_0(u')|\le\frac{C_M}{1+t+|x|}\sum_{1\le|\alpha|\le M+1}|\Gamma^\alpha u|\cdot\sum_{1\le|\alpha|\le\frac{M+2}{2}}|\Gamma^\alpha u|. \tag{6.1.23}$$

为估计广义的能量，接下来我们要寻找一个比关于时间平移不变生成元 ∂_t 更一般的向量场 $X(\partial)$，使得 $X(\partial)v\Box v$ 能写成一个精确的散度。为了得到一个非平凡的能量不等式，注意到相关的能量（散度的零分量的积分）总是非负的。这说明，相差一个 Lorentz 变换，这样的算子仅包括 ∂_t 和

$$X_0(\partial)=(t^2+|x|^2)\partial_t+2t(\sum_{i=1}^3x_i\partial_i+1)$$

的组合。见 Hörmander [21] 对这个事实的一个证明。算子 X_0 是 Morawetz 在研究一个障碍问题的波方程的衰减估计时引入的。

对我们所需的能量讨论，只要这两个算子的一个最简单的组合，即

$$\begin{aligned}X(\partial)&=\partial_t+X_0(\partial)\\&=(1+t^2+|x|^2)\partial_t+2t\sum_{i=1}^3x_i\partial_i+2t\\&=\vec{X}\cdot\nabla_{t,x}+2t,\end{aligned} \tag{6.1.24}$$

其中主部的系数是由 $\vec{X}=(1+t^2+|x|^2,2tx_1,2tx_2,2tx_3)$ 给出的。

如同第三章第三节，令 $\mathbf{1}=(1,0,0,0)$，我们可得下面的重要的公式

$$X(\partial)v\Box v=\mathrm{div}(X(\partial)vg_0v'-1/2g_0(v',v')\vec{X}-v^2\mathbf{1}). \tag{6.1.25}$$

事实上，我们注意到 $\mathrm{div}\vec{X}=8t$ 和如果 $X_j,j=0,\cdots,3$ 记 $\vec{X}$ 的坐标，

$$\sum_{j,k=0}g_0^{jj}\partial_jX_k\partial_jv\partial_kv=2tg_0(v',v').$$

因此，

$$\begin{aligned}&\mathrm{div}(X(\partial)vg_0v'-1/2g_0(v',v')\vec{X}-v^2\mathbf{1})\\=&\ \mathrm{div}((\vec{X}\cdot v')g_0v'-1/2g_0(v',v')\vec{X})+\mathrm{div}(2tvg_0v'-v^2\mathbf{1})\\=&\ (\vec{X}\cdot v')\Box u+\sum g_0^{jj}\partial_jv\partial_jX_k\partial_kv-1/2g_0(v',v')\mathrm{div}\vec{X}+2t\sum g_0^{jj}\partial_j(v\partial_jv)\\=&\ (\vec{X}\cdot v'+2tv)\Box u+2tg_0(v',v')-4tg_0(v',v')+2tg_0(v',v')=X(\partial)v\Box u\end{aligned}$$

现在我们计算与 (6.1.25) 相关的能量密度。注意到

$$1/2|L_0v|^2+1/2\sum_{0\le j<k\le3}|\Omega_{jk}v|^2=1/2(t^2+|x|^2)|v'|^2+2t\partial_tvx\cdot\partial_xv$$

由此我们看到 (6.1.25) 中散度的零分量是

$$\begin{aligned} e_0(v) &= X(\partial)v\partial_t v - 1/2(1+t^2+|x|^2)g_0(v',v') - v^2 \\ &= 1/2(1+t^2+|x|^2)|v'|^2 + 2t\partial_t v\partial_x v\cdot x + 2tv\partial_t v - v^2 \\ &= 1/2[|v'|^2 + |L_0 v|^2 + \sum_{0\le j<k\le 3}|\Omega_{jk}v|^2] + 2tv\partial_t v - v^2. \end{aligned} \tag{6.1.26}$$

设 $E_0(t,v)$ 是相关的能量

$$\begin{aligned} E_0(t,v) &= \int_{\mathbb{R}^3} e_0(v)(t,x)\mathrm{d}x \\ &= 1/2\int_{\mathbb{R}^3}(|v'|^2+|L_0v|^2+\sum_{0\le j<k\le 3}|\Omega_{jk}v|^2)\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^3}(2tv\partial_t v - v^2)\mathrm{d}x \end{aligned}$$

注意到 $2vt\partial_t v = 2vL_0v - \sum_{j=1}^3 x_j\partial_j v^2$，这样

$$\int 2tv\partial_t v\mathrm{d}x = \int 2vL_0v\mathrm{d}x + 3\int v^2\mathrm{d}x \tag{6.1.27}$$

或等价地，

$$\int(2tv\partial_t v - v^2)\mathrm{d}x = \int(2vL_0v + 2v^2)\mathrm{d}x.$$

由此我们得到

$$\frac{1}{2}\|L_0v+2v\|_{L^2}^2 = \int(\frac{1}{2}|L_0v|^2 + 2tv\partial_t v - v^2)\mathrm{d}x.$$

这样

$$E_0(t;v) = \frac{1}{2}\left(\|v'\|_{L^2}^2 + \sum_{0\le j<k\le 3}\|\Omega_{jk}v\|_{L^2}^2 + \|L_0v+2v\|_{L^2}^2\right). \tag{6.1.28}$$

为应用第一小节中的估计，我们需要包含不变向量场的 L^2 范数的能量。具体地，我们要求

引理 6.1.2 *存在一个常数 C 使得*

$$C^{-1}\sum_{|\alpha|\le 1}\|\Gamma^\alpha v(t,\cdot)\|_{L^2}^2 \le E_0(t,v) \le C\sum_{|\alpha|\le 1}\|\Gamma^\alpha v(t,\cdot)\|_{L^2}^2. \tag{6.1.29}$$

证明 由 (6.1.28) 和 Minkowski 不等式，其上界是显然的。为证下界，我们只要说明，对某个 C，$\|v(t,\cdot)\|_{L^2}^2 + \|L_0v(t,\cdot)\|_{L^2}^2 \le cE_0(t,v)$.

对于这一点，如同 引理 6.1.1 的证明，设 $\Omega_r = |x|^{-1}\sum_{j=1}^3 x_j\Omega_{0j} = t\partial_r + r\partial_t$. 由极坐标分步积分，

$$\int 2tv\partial_t v\mathrm{d}x = \int 2tr^{-1}v\Omega_r v\mathrm{d}x - \int 2t^2r^{-1}v\partial_r v\mathrm{d}x$$

$$= \int 2tr^{-1}v\Omega_r v\mathrm{d}x + \int t^2r^{-2}v^2\mathrm{d}x. \quad (6.1.30)$$

这样, 如果我们用 3/4 乘 (6.1.27) 的右边加上 (6.1.30) 右边的 1/4, 我们得

$$\int (2tv\partial_t v - v^2)\mathrm{d}x = \int (3/2vL_0v + 5/4v^2 + 1/2tr^{-1}v\Omega_r v + 1/4t^2r^{-2}v^2)\mathrm{d}x.$$

因此

$$\begin{aligned} E_0(t;v) &= \frac{1}{2}\int (|v'|^2 + \sum_{0\le j<k\le 3}|\Omega_{jk}v|^2 - |\Omega_r v|^2)\mathrm{d}x \\ &+\frac{1}{2}\int ((L_0v)^2 + 3vL_0v + 5/2v^2)\mathrm{d}x \\ &+\frac{1}{2}\int ((\Omega_r v)^2 + tr^{-1}v\Omega_r v + 1/2t^2r^{-2}v^2)\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

用 Ω_r 的定义我们看到第一个积分是非负的, 基本的演算说明对后两个积分同样是对的。此外, 由于第二个积分大于 $(L_0v)^2 + v^2$ 的一个正常数倍。证毕!

应用上面的结果和能量积分方法, 我们就得到下面的重要结果。

命题 6.1.2 设 $v \in C^2(\mathbb{R}_+^{1+3})$ 对大的 x 为 0, 则如果 $t > 0$,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E_0(t;v) \le 2\|(1+t+|x|)\Box v(t,\cdot)\|_{L^2}E_0(t,v)^{1/2}. \quad (6.1.31)$$

此外, 对固定的 $M = 0, 1\cdots$

$$\begin{aligned} &\sum_{|\alpha|\le M+1}\|\Gamma^\alpha v(t,\cdot)\|_{L^2} \quad (6.1.32)\\ \le\ & C\sum_{|\alpha|\le M+1}\|\Gamma^\alpha v(0,\cdot)\|_{L^2} + C\sum_{|\alpha|\le M}\int_0^t \|(1+\tau+|x|)\Gamma^\alpha\Box v(\tau,\cdot)\|_{L^2}\mathrm{d}\tau. \end{aligned}$$

证明 由于 $e_0(v)$ 在 (6.1.25) 中是散度的零分量。

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E_0(t,v) &= \int \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e_0(t,x)\mathrm{d}x = \int X(\partial)v\Box v\mathrm{d}x \\ &\le \|(1+|(t,x)|)^{-1}X(\partial)v\|_{L^2}\|(1+|(t,x)|)\Box v\|_{L^2}. \end{aligned}$$

但 $X(\partial)v = \vec{X}\cdot v' + 2tv$ 和

$$\vec{X}\cdot v' = \partial_t v + (t,x)\cdot(L_0v, \Omega_{01}v, \Omega_{02}v, \Omega_{03}v).$$

因此

$$\begin{aligned} |X(\partial)v|^2 &\le 2(\partial_t v)^2 + 2|(t,x)|^2[|L_0v+2v|^2 + \sum|\Omega_{0j}v|^2] \\ &\le 4(1+|(t,x)|)^2[1/2|\partial_t v|^2 + 1/2|L_0v+2v|^2 + 1/2\sum|(\Omega_{0j}v)|^2]. \end{aligned}$$

由 (6.1.28), 组合这两不等式得到 (6.1.31)。

显然 (6.1.31) 意味着

$$E_0(t;v)^{1/2} \le E_0(0;v)^{1/2} + \int_0^t \|(1+\tau+|x|)\Box v(\tau,\cdot)\|_{L^2}\mathrm{d}\tau. \tag{6.1.33}$$

由于 $[\Box,\Gamma]$ 或是 0 或是 $2\Box$, 如果 Γ 是一个不变向量场, 这与引理 6.1.2 意味着 (6.1.32) 成立。

定理 6.1.4 **的证明**. 如同 定理 6.1.1 的证明, 我们将使用连续性方法。由于局部存在性定理对形如 (4.4.1) 的方程组也是成立的, 只要说明, 如果 u 是 (4.4.1) 在 $[0,T_*)\times\mathbb{R}^3$ 中的一个 C^∞ 解。则如果 $0<\varepsilon<\varepsilon_0$, 其中 ε_0 仅依赖于 (4.4.1) 中的 f 和 g, 我们有 $\sum_{|\alpha|\le 4}|\partial^\alpha u|\in L^\infty([0,T_*)\times\mathbb{R}^3)$。为此, 设 u_0 是波动方程 $\Box u_0=0$ 具相同初值 $u_0(0,\cdot)=\varepsilon f, \partial_t u(0,\cdot)=\varepsilon g$ 的解, Γ 是一个不变向量场, 注意到 $\Box\Gamma u_0=0$, 则如果 k 固定,

$$\sum_{|\alpha|\le k}|\Gamma^\alpha u_0(t,x)| \le \frac{A\varepsilon}{2(1+t+|x|)} \tag{6.1.34}$$

对某绝对常数 A 成立。我们断言: 存在一个 $\varepsilon_0>0$ 使得, 如果 $0<\varepsilon<\varepsilon_0$, 则

$$\sum_{|\alpha|\le k}|\Gamma^\alpha u(t,x)| \le \frac{A\varepsilon}{(1+t+|x|)},\ 0\le t<T_*. \tag{6.1.35}$$

为证定理, 我们需要对某 $k\ge 4$ 估计这样的界, 因此在下面我们将固定这样的 k。由 (4.4.1) 和 (4.4.2), 我们看到 $\Gamma^\alpha u(0,\cdot)-\Gamma^\alpha u_0(0,\cdot)=O(\varepsilon^2)$。因此, 如果 $\varepsilon>0$ 足够小和固定, 我们得到对于充分小的 T, $0<T<T^*$, (6.1.34) 意味着 (6.1.35) 中的界在 $0\le t\le T$ 上成立。这样, 我们假设 $0<T<T_*$, 和

$$\sum_{|\alpha|\le k}|\Gamma^\alpha u(t,x)| \le \frac{2A\varepsilon}{(1+t+|x|)},\ t\in[0,T]\subset[0,T_*). \tag{6.1.36}$$

然后, 我们断言, 如果 ε 充分小, 则这意味着存在绝对常数 A_0 和 C_0 使得

$$\sum_{|\alpha|\le k+3}\|\Gamma^\alpha u(t,\cdot)\|_{L^2} \le A_0(1+t)^{C_0\varepsilon}\sum_{|\alpha|\le k+3}\|\Gamma^\alpha u(0,\cdot)\|_{L^2} \tag{6.1.37}$$

在 $0\le t\le T$ 上成立。此外, 假如我们能够说明, 如果 $\varepsilon>0$ 充分小, 这个不等式和 (6.1.36), 意味着 (6.1.36) 的下面的改进:

$$\sum_{|\alpha|\le k}|\Gamma^\alpha u(t,x)| \le \frac{A\varepsilon}{1+t+|x|},\ 0\le t\le T. \tag{6.1.38}$$

那么, 我们就能得到: 如果 $\varepsilon>0$ 足够小, 使得 (6.1.38) 成立的 $T\in[0,T_*)$ 的集合既是 $[0,T_*)$ 中的相对开集, 又是其相对闭集。又由于我们已经看到这是一个非空集合, 这就意味着 (6.1.35) 必须成立。这就完成了定理的证明。

这样, 我们将定理的证明分为两步。首先, 我们说明 (6.1.36) 意味着 (6.1.37)。然后说明 (6.1.36) 和 (6.1.37) 意味着 (6.1.38)。

我们先说明 (6.1.36) 意味着 (6.1.37) 成立。为应用命题 6.1.2, 我们先注意到

$$\Gamma^\alpha \Box u = \Gamma^\alpha F(u,u') = \Gamma^\alpha F_0(u') + \Gamma^\alpha R(u,u').$$

其中, 如果 $F_0(u')$ 是如同 定义 4.4.1 中的 F 的二次型, $R(u,u') = F(u,u') - F_0(u')$。另外, 我们还需要估计如果 $|\alpha| \le (k+3) - 1 = k+2$, $(1+t+|x|)$ 乘上式右边两项中每一项的 L^2 范数。对于这主要的项, 我们只要用 命题 6.1.1 看到, 如果 $0 \le t \le T$,

$$\begin{aligned} \|(1+t+|x|)(\Gamma^\alpha F_0(u'))(t,\cdot)\|_{L^2} &\le C \sum_{|\beta|\le k+3} \|\Gamma^\beta u(t,\cdot)\|_{L^2} \sum_{|\alpha|\le \frac{k+4}{2}} \|\Gamma^\beta u(t,\cdot)\|_{L^\infty} \\ &\le \frac{2CA\varepsilon}{1+t} \sum_{|\beta|\le k+3} \|\Gamma^\beta u(t,\cdot)\|_{L^2}, \end{aligned}$$

对于最后一步用 (6.1.36) 和对于 $k \ge 4$ 有 $(k+4)/2 \le k$ 成立的事实。剩下来的项也容易估计, 由于在 $(u,u') = 0$ 三阶为 0, 由 Taylor 定理和 Leibniz 法则, $\Gamma^\alpha R$ 必是形如

$$a(u,u')\Gamma^{\alpha_1} u^{(j_1)} \Gamma^{\alpha_2} u^{(j_2)} \Gamma^{\alpha_3} u^{(j_3)} \tag{6.1.39}$$

的项的线性组合, 其中 $|\alpha_1| + |\alpha_2| + |\alpha_3| \le |\alpha| \le k+2, j_i = 0$ 或 1, $a = O(1)$。因此, 这里至多存在一个因子包括多于 $(k+4)/2$ 阶的导数, 这样我们能用 (6.1.36) 看到对于固定的 t

$$\|(1+t+|x|)\Gamma^\alpha R(u,u')(t,\cdot)\|_{L^2} \le C\varepsilon^2 (1+t)^{-1} \sum_{|\beta|\le k+3} \|\Gamma^\beta u(t,\cdot)\|_{L^2}.$$

因此, 如果 $0 < \varepsilon < 1$, 且 (6.1.36) 成立, 我们得到存在一个常数 C_1 使得

$$\|(1+t+|x|)\Gamma^\alpha \Box u((t,\cdot)\|_{L^2} \le C_1 \varepsilon (1+t)^{-1} \sum_{|\beta|\le k+3} \|\Gamma^\beta u(t,\cdot)\|_{L^2}.$$

用 (6.1.32), 可得

$$\begin{aligned} &\sum_{|\alpha|\le k+3} \|\Gamma^\alpha u(t,\cdot)\|_{L^2} \\ \le\ & C \sum_{|\alpha|\le k+3} \|\Gamma^\alpha u(0,\cdot)\|_{L^2} + \int_0^t CC_1\varepsilon(1+\tau)^{-1} \sum_{|\alpha|\le k+3} \|\Gamma^\alpha u(\tau,\cdot)\|_{L^2} \mathrm{d}\tau. \end{aligned}$$

由 Gronwall 不等式就得到 (6.1.37)。

接下来我们来给出从 (6.1.37) 和 (6.1.36) 得到 (6.1.38) 的证明。

对于前面取定的 A, 使得线性方程 $\Box u_0 = 0$ 满足初值 $(\varepsilon f, \varepsilon g)$ 的解也满足 (6.1.34)。如以前所指, 方程意味着 $\Gamma^\alpha u - \Gamma^\alpha u_0$ 的 Cauchy 初值是 $O(\varepsilon^2)$ 。因此,

由第三章的 定理 3.1.1, 线性波动方程满足这个初值的解必是 $O(\varepsilon^2(1+t+|x|)^{-1})$。因此, 如果我们对于固定 $|\alpha| \le k$ 能说明, 对于充分小的 $\varepsilon > 0$,

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} |\Gamma^\beta \Box \Gamma^\alpha u(t,x)| \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}t}{1+t+|x|} \le C\varepsilon^2, |\beta| \le 2, |\alpha| \le k \tag{6.1.40}$$

成立, 应用 定理 3.6.10 就能得到 (6.1.38)。事实上, 如果这个不等式成立, 则由上面的讨论, 由 定理 3.6.10 我们有 $\Gamma^\alpha u - \Gamma^\alpha u_0 = O(\varepsilon^2(1+t+|x|)^{-1})$. 对于充分小的 $\varepsilon > 0$, 应用 (6.1.34) 即可得 (6.1.38)。

由于 $\Box$ 与不变向量场之一的交换子或是 0 或是 $2\Box$, (6.1.40) 当然是估计

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} |\Gamma^\alpha \Box u(t,x)| \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}t}{1+t+|x|} \le C\varepsilon^2, |\alpha| \le k+2 \tag{6.1.41}$$

的一个推论。

为说明 $\Gamma^\alpha F_0(u')$ 满足这个估计, 我们注意到 命题 6.1.1 意味着它可由

$$(1+t+|x|)^{-1} \sum_{|\alpha| \le k+3} |\Gamma^\alpha u|^2$$

逐点估计。因此, 由 (6.1.37)

$$\int |\Gamma^\alpha F_0(u')(t,x)| \mathrm{d}x \le C\varepsilon^2 (1+t)^{-1+2C_0\varepsilon}.$$

为估计余项, 我们注意到它是形如 (6.1.39) 的项的一个线性组合。如果我们用 (6.1.36) 去逐点估计包含最少导数的项, 和应用 Schwarz 不等式估计剩余因子的积分, 我们得到

$$\int |\Gamma^\alpha R(u,u')(t,x)| \mathrm{d}x \le C\varepsilon^3 (1+t)^{-1+2C_0\varepsilon}.$$

由于 $\Box u = F_0 + R$, 我们得到如果 $2C_0\varepsilon < 1$, (6.1.41) 成立。

接下来我们将定理 6.1.4 延拓到包括某种类型的非线性方程, 其中 $\partial_j\partial_k u$ 的系数允许依赖于 u'。具体地, Christodoulou 和 Klainerman [36] 的定理包括形如

$$\begin{cases} \Box u^I(t,x) = \sum_{j,k=0}^3 g^{jk}(u,u')\partial_j\partial_k u^I + F^I(u,u'),\ I = 1,\cdots,N, \\ u(0,x) = \varepsilon f(x),\ \partial_t u(0,x) = \varepsilon g(x), \end{cases} \tag{6.1.42}$$

的拟线性方程组, 其中 $g^{jk}(u,u')$ 满足包含在下面的零条件

定义 6.1.1 我们说 $\{g^{jk}(u,u')\}$ 满足零条件如果

$$g^{jk}(u,u') = \sum_{I=1}^N \sum_{l=0}^3 g_I^{jkl} \partial_l u^I + O(|u|^2 + |u'|^2),$$

其中, 对每个 $I = 1,\cdots,N$, 常数 g_I^{jkl} 满足

$$\sum_{j,k,l=0}^3 g_I^{jkl} \xi_j\xi_k\xi_l = 0, \text{其中} \xi_0^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2.$$

定理 6.1.5 固定 $f,g\in C_0^\infty(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^N)$ 设 $F(u,u')$ 和 $\{g^{jk}(u,u')\}$ 满足零条件，则如果 $\varepsilon>0$ 充分小，(6.1.42) 有一个 C^∞ 整体解。

如前所说，这个定理的证明只是 定理 6.1.4 的一些技巧性的修改。我们首先注意到如果

$$G(u',u'')=\sum_{I=1}^{N}\sum_{k,l=0}^{3}g_I^{jkl}\partial_l u^I\partial_j\partial_k u$$

是方程右端项的主要项，则 $G(u',u'')$ 必是形如 $Q(u^I,\partial u)$ 的项的一个线性组合，其中 Q 是一个零形式。因此，用 命题 6.1.1，我们可得

$$\sum_{|\alpha|\le M}|\Gamma^\alpha G(u',u'')|\le C(1+t+|x|)^{-1}\sum_{|\alpha|\le M+2}|\Gamma^\alpha u|\sum_{|\alpha|\le\frac{M+4}{2}}|\Gamma^\alpha u|. \tag{6.1.43}$$

这是这个结果的证明不同于前一个的两个主要附加的要素之一。另一个是在前面用过的，在用到 (6.1.42) 中 $\partial_j\partial_k u$ 的变系数情形的能量讨论的一个修改。

6.1.3 零条件和二维波动方程的整体解

我们考虑半线性 Cauchy 问题

$$\begin{cases}\Box u=F(u'),\ t>0,x\in\mathbb{R}^2,\\ u|_{t=0}=\varepsilon f,\partial_t u|_{t=0}=\varepsilon g,\end{cases} \tag{6.1.44}$$

解的长时间存在性问题，其中 $F\in C^\infty$ 且 $\partial^\alpha F(0)=0$, $|\alpha|\le 1$, $f,g\in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$。如果 $|x|\ge M$, 则 $f(x)=g(x)=0$, $\varepsilon>0$ 是一个小参数。P. Godin [19] 证明了，如果 F 的二次项部分满足零条件，则有几乎整体解；如果 F 的二次、三次项均满足零条件，则当 ε 小时，存在整体解。这一节我们将介绍这个结论。

我们先介绍一些记号。如果 $h\in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, 用 $R_h(\xi,\lambda)$, $\xi\in\mathbb{S}^1$, $\lambda\in\mathbb{R}$, 记 h 的 Radon 变换，即 $R_h(\xi,\lambda)=\int_{\langle y,\xi\rangle=\lambda}h(y)\mathrm{d}\sigma(y)$，其中 $\mathrm{d}\sigma(y)$ 记直线 $\langle y,\xi\rangle=\lambda$ 中的测度。记 $\mathcal{F}(\xi,\rho)$ 为与初始条件 f,g 相联系的 Friedlander 径向场

$$\mathcal{F}(\xi,\rho)=2^{-3/2}\pi^{-1}\int_\rho^\infty(\lambda-\rho)^{-1/2}(R_g(\xi,\lambda)-\partial_\lambda R_f(\xi,\lambda))\mathrm{d}\lambda.$$

可以证明 $(1+|\rho|)^{3/2}|\partial_\rho\mathcal{F}(\xi,\rho)|$ 是有界的，当 ρ 是正的且很大时 $\mathcal{F}=0$, (参见 [22])。

如果记 $F_j(z)=\sum_{|\alpha|=j}\partial^\alpha F(0)z^\alpha/\alpha!$, 则 $A_1=\max\{-F_2(-1,\xi)\partial_\rho\mathcal{F}(\xi,\rho),\xi\in\mathbb{S}^1,\rho\in\mathbb{R}\}$, $A_2=\max\{-F_3(-1,\xi)(\partial_\rho\mathcal{F}(\xi,\rho))^2,\xi\in\mathbb{S}^1,\rho\in\mathbb{R}\}$ 是有意义的，且 ≥ 0。用 T_ε 记问题 (6.1.44) 的解的最大存在时间，则由 定理 6.1.2 存在常数 c, 当 ε 小时，$T_\varepsilon\ge c/\varepsilon^2$。

事实上，这个估计可以改进为 $\liminf_{\varepsilon\to0}\varepsilon T_\varepsilon^{1/2}\ge 1/A_1$。如果 $|f|+|g|\ne0$, 从当 $|\rho|\to\infty$ 时 $\partial_\rho\mathcal{F}\to0$ 的事实容易得到 $A_1=0$ 当且仅当在 $\{-1\}\times\mathbb{S}^1$ 上 $F_2\equiv0$。

这时 $F(u') = cQ(u') + G(u')$, $c \in \mathbb{R}$, $Q(q) = q_0^2 - q_1^2 - q_2^2$, 其中 $q = (q_0, q_1, q_2)$, 且当 $|q| \to 0$ 时 $G(q) = O(|q|^3)$。令 $v = (1 - e^{-cu})/c$, 则 (6.1.44) 就成为

$$\begin{cases} \Box v = (1 - cv)G((1 - cv)^{-1}v'), \\ v|_{t=0} = (1 - e^{-c\varepsilon f})/c, v_t|_{t=0} = \varepsilon g e^{-c\varepsilon f}, \end{cases} \tag{6.1.45}$$

容易验证初始条件关于不变向量场的 Sobolev 空间 (这一节所涉及的 Sobolev 空间均如此) 意义下是小初值的, 即 $\|v(0)\|_{H^k} \leq C_k\varepsilon$ 对所有的 $k \in \mathbb{N}$ 成立。在这种情形二次非线性项满足零条件, 这样有

定理 6.1.6 若在 $\{-1\} \times \mathbb{S}^1$ 上, $F_2 \equiv 0$, 则 $\liminf_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^2 \log T_\varepsilon \geq 1/A_2$。

注意到如果在 $\{-1\} \times \mathbb{S}^1$ 上 $F_3 \equiv 0$, 则 $A_2 \equiv 0$。所以进一步我们有

定理 6.1.7 若在 $\{-1\} \times \mathbb{S}^1$ 上, $F_2 \equiv F_3 \equiv 0$, 则当 ε 充分小时问题 (6.1.44) 有整体解。

定理 6.1.6 的证明将用连续性方法, 为此我们先证明一个关于不变向量场的能量不等式:

命题 6.1.3 设 $\delta > 0$ 充分小, 使得当 $\|v\|_{W^{1,\infty}} \leq \delta$ 时 G 在 $(1 - cv)^{-1}v'$ 的一个邻域中有定义。则如果 $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $R > 0$, 则存在 $C_k, C_{k,R} > 0$ 使得: 如果 $t > 0$, $v \in C^\infty([0,t] \times R_x^2)$ 是 (6.1.45) 满足 $\sup_{0 \leq s \leq t} \|v\|_{W^{1,\infty}} \leq \delta$ 和 $\sup_{0 \leq s \leq t}(\|v(s)\|_{W^{[\frac{k+1}{2}],\infty}} + \|v'\|_{W^{[\frac{k}{2}],\infty}}) \leq R$ 的一个解, 则

$$\|v'(t)\|_{H^k} \leq C_k \|v'(0)\|_{H^k} e^{C_{k,R}\int_0^t (\|v'\|^2_{W^{[\frac{k}{2}],\infty}} + (1+s)\|v'\|^4_{W^{[\frac{k-1}{2}],\infty}})\mathrm{d}s}.$$

证明 首先由 Taylor 公式, 我们有

$$(1 - cv)G((1 - cv)^{-1}v') = \sum_{|\mu|=3} \phi_\mu(v, v')v'^\mu,$$

其中 ϕ_μ 是其变量在原点附近的光滑函数, $v'^\mu = \sum_{j=0}^2 (\partial_j v)^{\mu_j}, \mu = (\mu_0, \mu_1, \mu_2)$。由能量不等式

$$\|v'(t)\|_{H^k} \leq C_k(\|v'(0)\|_{H^k} + \int_0^t \|\Box v(s)\|_{H^k})\mathrm{d}s,$$

和 Gronwall 不等式, 我们只需要证明当

$$\|v\|_{W^{1,\infty}} \leq \delta 和 \|v(s)\|_{W^{[\frac{k+1}{2}],\infty}} + \|v'\|_{W^{[\frac{k}{2}],\infty}} \leq R \tag{6.1.46}$$

时有以下的估计:

$$\|(\phi_\mu(v, v')v'^\mu)(t)\|_{H^k} \leq C_{k,R}(\|v'(t)\|^2_{W^{[\frac{k}{2}],\infty}} + (1 + t)\|v'(t)\|^4_{W^{[\frac{k-1}{2}],\infty}})\|v'(t)\|_{H^k}. \tag{6.1.47}$$

为此, 我们固定 μ, 利用 Taylor 公式 $\phi_\mu(v, v') = \varphi_0(v) + \sum_{|\beta|=1} \varphi_\beta(v, v')v'^\beta$, 问题归结为以下两个估计: 当 $|\alpha| \leq k$ 和条件 (6.1.46) 满足时, 成立

$$\|(\Gamma^\alpha(\varphi_0(v)v'^\mu))(t)\|_{L^2} \leq C_{k,R}\|v'(t)\|^2_{W^{[\frac{k}{2}],\infty}} \|v'(t)\|_{H^k}, \tag{6.1.48}$$

和当 $|\beta| = 1$ 时，成立

$$\|(\Gamma^\alpha(\varphi_\beta(v,v')v'^{\beta+\mu}))(t)\|_{L^2} \le C_{k,k}(\|v'(t)\|^3_{W^{[\frac{k}{2}],\infty}}+(1+t)\|v'(t)\|^4_{W^{[\frac{k-1}{2}],\infty}})\|v'(t)\|_{H^k}. \tag{6.1.49}$$

记 $\varphi_0 = \varphi_0(v)$；当 $|\gamma| = 1$ 时，记 $\varphi_\gamma = \varphi_\gamma(v,v')$。这样，对于 $|\gamma| \le 1, \Gamma^\alpha(\varphi_\gamma v'^{\gamma+\mu}) = \sum_{j=1}^3 J_{\gamma j}$，其中

$$J_{\gamma 1} = \varphi_\gamma \Gamma^\alpha v'^{\gamma+\mu}, J_{\gamma 2} = \sum_{\theta<\alpha\le 2\theta} C_\theta \Gamma^{\alpha-\theta}\varphi_\gamma \Gamma^\theta v'^{\gamma+\mu},$$

$$J_{\gamma 3} = \sum_{\alpha>2\theta} C_\theta \Gamma^{\alpha-\theta}\varphi_\gamma \Gamma^\theta v'^{\gamma+\mu},$$

C_θ 为适当的常数。由条件 (6.1.46) 可得 $J_{\gamma1}, J_{\gamma2}$ 的估计:

$$\|J_{\gamma 1}(t)\|_{L^2} \le C_{k,R}\|v'\|^{|\gamma|+2}_{W^{[\frac{k}{2}],\infty}}\|v'(t)\|_{H^k}, \tag{6.1.50}$$

$$\begin{aligned}\|J_{\gamma 2}(t)\|_{L^2} &\le C_k \sum_{\theta<\alpha\le 2\theta} \|\Gamma^{\alpha-\theta}\varphi_\gamma(t)\|_{L^\infty}\|\Gamma^\theta v'^{\gamma+\mu}(t)\|_{L^2} \\ &\le C_{k,R}\|v'(t)\|^{|\gamma|+2}_{W^{[\frac{k-1}{2}],\infty}}\|v'(t)\|_{H^{k-1}}.\end{aligned} \tag{6.1.51}$$

为了估计 $J_{03}(t)$，注意到 $\Gamma^{\alpha-\theta}\varphi_0$ 是形如 $(\partial^\rho\varphi_0)(v)\Pi(\Gamma^{\sigma^j}v)^{\lambda_j}$ 的项的和，其中 $\lambda_j \in \mathbb{N}, \sigma^j \in \mathbb{N}^7\backslash\{0\}, \sum\lambda_j\sigma^j = \alpha-\theta$，而且至多只有一个指标 j 使得 $|\sigma^j| > \frac{|\alpha-\theta|}{2}$，并且此时相应的 $\lambda_j = 1$。设 $\mu_h \ne 0$，则 $\mu = \delta_h + \sigma$，其中当 $h \ne l$ 时,$\delta_h(l) = 0; \delta_h(h) = 1, |\sigma| = 2$。这样 $\Gamma^\theta v'^\mu = \sum_{\zeta\le\theta} C_\zeta \Gamma^\zeta\partial_h v\cdot\Gamma^{\theta-\zeta}v'^\sigma$，其中 $C_\zeta \in \mathbb{R}$，由以上分析知,

$$\|J_{03}(t)\|_{L^2} \le C_{k,R}\sum\|(\Gamma^\omega v(t)\cdot\Gamma^\zeta\partial_h v)(t)\|_{L^2}\|v'(t)\|^2_{W^{[\frac{k-1}{2}],\infty}}.$$

这里是对满足 $\zeta \le \theta, 2\theta < \alpha, |\omega| + |\zeta| \le k$ 的 ω, ζ 和 h 求和，因此有

$$\|J_{03}(t)\|_{L^2} \le C_{k,R}\|v(t)\|_{W^{[\frac{k+1}{2}],\infty}}\|v'(t)\|^2_{W^{[\frac{k-1}{2}],\infty}}\|v'(t)\|_{H^k}{}^1. \tag{6.1.52}$$

(6.1.48) 由 (6.1.50)(6.1.51)(6.1.52) 得到。

接下来估计 $|\gamma| = 1$ 时的 $\|J_{\gamma3}\|$。注意到 $\Gamma^{\alpha-\theta}\varphi_\gamma$ 是形如

$$a(v,v')\Gamma^{\zeta_1}v^{(j_1)}\cdots\Gamma^{\zeta_l}v^{(j_l)}$$

的项的线性组合，其中 $a = O(1), \zeta_1+\cdots+\zeta_n = \alpha-\theta, l \ge 1, j_i = 0$ 或 $1, i = \overline{1,l}$。$|\zeta_1|,\cdots,|\zeta_l|$ 中至多有一个大于 $\frac{k}{2}$。不妨设 $|\zeta_1| > \frac{k}{2}$。第一项用 L^2 模控制，其余用 L^∞ 模控制。若 $j_1 = 0$，则 $\|\Gamma^{\zeta_1}v\|_{L^2} \le C(1+t)\|v'(t)\|_{H^k}$；若 $j_1 = 1$，则 $\|\Gamma^\zeta v'\|_{L^2} \le \|v'(t)\|_{H^k}$。所以 $\|\Gamma^{\alpha-\theta}\varphi_\gamma\|_{L^2} \le C_{k,R}(1+t)\|v'(t)\|_{H^k}$，从而

$$\|J_{\gamma3}\|_{L^2} \le \sum_{2\theta<\alpha}\|\Gamma^{\alpha-\theta}\varphi_\gamma\cdot\Gamma^\theta v'^{\gamma+\mu}\|_{L^2} \le C_{k,R}(1+t)\|v'(t)\|^4_{W^{[\frac{k-1}{2}],\infty}}\|v'(t)\|_{H^k}.$$

这样，(6.1.49) 可由 (6.1.50)(6.1.51) 及上一估计得到。

[1]用到结论：如果 $u(t,x), v(t,x) \in C^\infty$，$\text{supp } u \subset \{(t,x) : |x| \le t+M\}$，则 $\|(uv')(t)\|_{L^2} \le C_M\sum_{|\alpha|=1}\|\Gamma^\alpha v(t)\|_{L^\infty}\|u'(t)\|_{L^2}$

命题 6.1.4 设 $k\in\mathbb{N}, k\geq 7, m>0$, 存在一个与 m 无关的 $J_\varepsilon(B)>0$, $\varepsilon(m,B)>0$, 使得如果 $v\in C^\infty([0,T]\times\mathbb{R}_x^2)$ 是 (6.1.45) 满足 $B\varepsilon^2\log(1+T)\leq 1$ 和 $\varepsilon\leq\varepsilon(m,B)$ 的解, 且如果 $\sup_{0\leq s<T}\|v\|_{W^{[\frac{k+1}{2}],\infty}}\leq\delta$ 和 $\sup_{0\leq s<T}(1+t)^{1/2}\|v'(t)\|_{W^{[\frac{k}{2}],\infty}}\leq m\varepsilon$, 则 $\sup_{0\leq s<T}\|v'(t)\|_{H^k}\leq J_k(B)\varepsilon$ 和 $\sup_{0\leq t<T}((1+t)^{1/2}(\|v'(t)\|_{W^{k-2,\infty}}+\|v(t)\|_{W^{k-2,\infty}}))\leq J_k(B)\varepsilon$。

证明 注意到用命题 6.1.3 得到的估计, 其估计系数与 m 有关, 而对于 (t,x) 空间中有一部分是可以做到与 m 无关的。因此将区域分解成两部分作估计。固定 k, 有些常数与 k 有关, 为了方便, 在书写时我们略去 k。

第一步: 由 命题 6.1.3 及初值的估计, 如果 $m\varepsilon\leq 1$, 则

$$\|v'(t)\|_{H^k}\leq C\varepsilon\exp(C\int_0^t m^2\varepsilon^2(1+m^2\varepsilon^2)(1+s)^{-1}\mathrm{d}s)\leq C\varepsilon e^{\frac{2Cm^2}{B}}.$$

因此记 $r=|x|$, 对于 $|\beta|\leq k-2$, 由 Klainerman-Sobolev 不等式, 我们有

$$|\Gamma^\beta v'(t,x)|\leq C\varepsilon(1+t)^{-\frac{1}{2}}(1+|t-r|)^{-\frac{1}{2}}e^{\frac{2Cm^2}{B}}.\tag{6.1.53}$$

故对于任何固定的 J, 存在 $\lambda(m,B,J)$, 使得当 $|\beta|\leq k-2$, 和 $t-r\geq\lambda(m,B,J)$ 时, 有

$$|\Gamma^\beta v'(t,x)|\leq J\varepsilon(1+t)^{-\frac{1}{2}}.\tag{6.1.54}$$

不妨设 $\lambda(m,B,1)>0$。

第二步: 因为当 $r\geq M$ 时, $f=g=0$, 所以当 $r\geq t+M$ 时, $v=0$。定义 "波前带"

$$\Sigma_\varepsilon=\{(t,x)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^2, t\geq\frac{1}{\varepsilon}, -M\leq t-r\leq\lambda(m,B,1)\}.$$

设函数 $\varphi(t,x,\varepsilon),\psi(t,x,\varepsilon)$, 当 ε 充分小, $(t,x)\in\Sigma_\varepsilon, t<T_\varepsilon$ 时有定义。我们用 $\varphi=O^*(\psi)$ 表示如果 $\exists\varepsilon_0(m,B), J(B)>0$,($J(B)$ 与 m 无关) 使得不等式

$$\sup_{0\leq s<T}\|v(s)\|_{W^{[\frac{k+1}{2}],\infty}}\leq\delta,\ \sup_{0\leq s<T}((1+s)^{\frac{1}{2}}\|v'(s)\|_{W^{[\frac{k}{2}],\infty}})\leq m\varepsilon$$

对于 $T<T_\varepsilon, \varepsilon^2\log(1+T)\leq\frac{1}{B}, \varepsilon\leq\varepsilon_0(m,B)$ 成立意味着 $\varphi(t,x,\varepsilon)|\leq J(B)|\psi(t,x,\varepsilon)|$, 其中 $(t,x)\in\Sigma_\varepsilon, t<T$。当 $t=\frac{1}{\varepsilon}$ 时, $\varphi=O^*(\psi)$ 是指我们能找到 $\varepsilon_0(m), J>0$ 使得

$$\sup_{0\leq s\leq 1/\varepsilon}\|v(s)\|_{W^{[\frac{k+1}{2}],\infty}}\leq\delta,\ \sup_{0\leq s\leq 1/\varepsilon}((1+s)^{\frac{1}{2}}\|v'(s)\|_{W^{[\frac{k}{2}],\infty}})\leq m\varepsilon,$$

$\varepsilon\leq\varepsilon_0(m)$ 意味着当 $(t,x)\in\Sigma_\varepsilon$ $t=\frac{1}{\varepsilon}$ 时 $\|\phi(t,x,\varepsilon)\|_{L^\infty}\leq J\|\psi\|_{L^\infty}$ 成立。现在固定 $B>A_2$, 书写某些依赖于 B 的常数时略去 B。比如记 $\lambda(m,B,1)$ 为 $\lambda(m,1)$。

我们断言:

$$\Gamma^\alpha v'=O^*(\varepsilon t^{-\frac{1}{2}}),\tag{6.1.55}$$

其中 $|\alpha|\leq k-4$。

对于待定的 $p>0$，容易验证（可见 [25](22j)）：

$$\lambda(m,1)=O^*(\varepsilon^{-p}), r-t=O^*(\varepsilon^{-p}), \frac{1}{r}-\frac{1}{t}=O^*(\varepsilon^{-p}t^{-2}); \tag{6.1.56}$$

由 (6.1.53) 可以得到

$$\Gamma^\alpha v'=O^*(\varepsilon^{1-p}t^{-\frac{1}{2}}), |\alpha|\leq k-2. \tag{6.1.57}$$

注意到 $\Gamma^\alpha v(t,x)=-\int_r^{t+M}\Sigma_{i=1}^2\xi_i\partial_i\Gamma^\alpha v(t,s\xi)\mathrm{d}s, \xi=r^{-1}x, t+M-r=O^*(\varepsilon^{-p})$ 则有

$$\Gamma^\alpha v=O^*(\varepsilon^{1-2p}t^{-\frac{1}{2}}), |\alpha|\leq k-2. \tag{6.1.58}$$

令

$$X_0=-1, X_j=\xi_j=r^{-1}x_j, j=1,2,$$

记 $X=(X_0,X_1,X_2)$，我们容易验证以下估计（也可见 [25]）：

$$\partial_j w(t,x)=-X_j\partial_t w(t,x)+O(\|w(t)\|_{W^{1,\infty}}(1+t)^{-1}), j=1,2, \tag{6.1.59}$$

$$\partial_r w(t,x)=-\partial_t w(t,x)+O(\|w(t)\|_{W^{1,\infty}}(1+t)^{-1}), \tag{6.1.60}$$

其中 $r\partial_r=x_1\partial_1+x_2\partial_2$，因此，若 $p\leq 1$，有

$$(1-cv)G((1-cv)^{-1}v')=-F_3(X)(\partial_t v)^3+O^*(\varepsilon^{3-4p}t^{-\frac{5}{2}})+O^*(\varepsilon^{4-5p}t^{-2}) \tag{6.1.61}$$

事实上

$$\begin{aligned}(1-cv)G((1-cv)^{-1}v') &= \sum_{|\mu|=3}\Phi_\mu(v,v')v'^\mu \\ &= F_3(v')+\sum_{|\mu|=3}(\Phi_\mu(v,v')-\Phi_\mu(0,0))v'^\mu.\end{aligned}$$

再由 (6.1.59),(6.1.57) 及 (6.1.58) 可得。另一方面

$$\Box v=r^{-\frac{1}{2}}(\partial_t^2-\partial_r^2)(r^{\frac{1}{2}}v)-(4r^2)^{-1}v-r^{-2}(x_1\partial_2-x_2\partial_1)^2v,$$

从而有

$$r^{-\frac{1}{2}}(\partial_t^2-\partial_r^2)(r^{\frac{1}{2}}v)+F_3(x)(\partial_t v)^3=o(r^{-2}\|v\|_{W^{2,\infty}})+O^*(\varepsilon^{3-4p}t^{-\frac{5}{2}}+\varepsilon^{4-5p}t^{-2}).$$

利用 (6.1.56), (6.1.58) 以及 $k\geq 4$ 的事实得

$$(\partial_t^2-\partial_r^2+F_3(x)(\partial_t v)^2)(r^{\frac{1}{2}}v)=O^*(\varepsilon^{1-2p}t^{-2}+\varepsilon^{4-5p}t^{-\frac{3}{2}}). \tag{6.1.62}$$

令 $w=(\partial_t-\partial_r+\frac{1}{2}F_3(X)(\partial_t v)^2)(r^{\frac{1}{2}}v)$，由 (6.1.60), (6.1.57),(6.1.58) 和 (6.1.62) 得

$$(\partial_t+\partial_r+\frac{1}{2}F_3(x)(\partial_t v)^2)w=O^*(\varepsilon^{1-2p}t^{-2}+\varepsilon^{4-5p}t^{-\frac{3}{2}}). \tag{6.1.63}$$

利用 (6.1.56) (6.1.57) (6.1.58) (6.1.60), 经计算可得

$$w = 2t^{\frac{1}{2}}\partial_t v + O^*(\varepsilon^{1-2p}t^{-1}). \tag{6.1.64}$$

由 (6.1.57) (6.1.64) 得 $w = O^*(\varepsilon^{1-p})$, 和 $\partial_t v = \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}w + O^*(\varepsilon^{1-2p}t^{-\frac{3}{2}})$。

从而有

$$(\partial_t v)^2 = \frac{1}{4}t^{-1}w^2 + O^*(\varepsilon^{2-3p}t^{-2}).$$

把它代入到 (6.1.63) 得

$$(\partial_t + \partial_r)w + \frac{F_3(x)}{8t}w^3 = O^*(\varepsilon^{1-2p}t^{-2} + \varepsilon^{4-5p}t^{-\frac{3}{2}}). \tag{6.1.65}$$

以下取 $p \le \frac{1}{4}$ 。如前记 $\xi = r^{-1}x$, 我们可以说明, 当 $t = \frac{1}{\varepsilon}$ 时,

$$w(t,x) = -2\varepsilon\partial_\rho\mathcal{F}(\xi, r-t) + O^*(\varepsilon^{\frac{3}{2}}), \tag{6.1.66}$$

其中的 $\mathcal{F}$ 是联系着 f 和 g 的 Friedlander 经向场。

应用下面引理的可以得满足 (6.1.65), (6.1.66) 的解 w 的估计。

引理 6.1.3 *考虑 Cauchy 问题*

$$z'(t) = K\frac{z^3(t)}{t} + L(t), t > \frac{1}{\varepsilon},$$

$$z(\frac{1}{\varepsilon}) = \varepsilon h + q.$$

这里 $K, h, q \in R$,$L \in C([\frac{1}{\varepsilon}, T))$。且设

$$\int_{\frac{1}{\varepsilon}}^{T} |L(t)|dt \le C\varepsilon^{1+\delta}, |q| \le C\varepsilon^{1+\delta},$$

$K \le K_0$,$|h| \le h_0$,$2K_0h_0^2 \le B_0$ 对某 $C, \delta, h_0 > 0$ 及 $K_0, B_0 \in R$ 成立, 则有

(i) 若 $K_0 > 0$, 设 $B > B_0$, 则存在 $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(h_0, K_0, C, B_0, B, \delta)$, $C_1 = C_1(h_0, K_0, C, B_0, B, \delta) > 0$ 使得当 $\varepsilon \le \varepsilon_0$, $\varepsilon^2\log T \le \frac{1}{B}$ 时, 上述初值问题在 $[\frac{1}{\varepsilon}, T]$ 上有解, 且在其上满足 $|z(t)| \le C_1\varepsilon$;

(ii) 若 $K_0 \le 0$, 如果 $\bar{\varepsilon} > 0$, 则存在与 T 无关的 $C_1 = C_1(h_0, C, \delta, \bar{\varepsilon})$, 使得当 $\varepsilon \le \bar{\varepsilon}$ 时, 上述初值问题在 $[\frac{1}{\varepsilon}, T]$ 上有解, 且在其上满足 $|z(t)| \le C_1\varepsilon$。

证明 由标准的连续性方法, 我们只要证明, 如果 $z \in C^1([\frac{1}{\varepsilon}, T])$ 是引理中方程的解, 则 $|z(t)| \le C_1\varepsilon$。为方便, 我们将用 "当 $t > t^*$ 时, $z_1(t) \le z_2(t)$" 指对所有 $t > t^*$, 在 z_1, z_2 的公共最大区间上 $z_1(t) \le z_2(t)$ 成立。令 $z_0 = \varepsilon h + q$。如果有必要用 $-z$ 取代 z, 我们可以假设 $z_0 \ge 0$。设 $Z_\pm$ 是 Cauchy 问题

$$Z_\pm' = KZ_\pm^3/t \pm |L|, t > 1/\varepsilon, \quad Z_\pm(1/\varepsilon) = z_0$$

的解。如果 $\beta(t) = z_0 + C\varepsilon^{1+\delta} + \int_{1/\varepsilon}^{t} KZ_+^3(s)s^{-1}ds$, 容易验证当 $t > 1/\varepsilon$ 时, $z(t) \le Z_+(t) \le \beta(t)$。当 $t > 1/\varepsilon$ 时, $Z_+(t) \ge 0$。当 $K \le 0$ 时, 这意味着如果 $\varepsilon \le$

$\bar{\varepsilon}$, $z(t) \leq C_1\varepsilon$。这样，可假设 $K > 0$。则，我们有 $\beta' \leq K\beta^3 t^{-1}$。因此，如果 $S' = KS^3 t^{-1}$, $S(1/\varepsilon) = z_0 + C\varepsilon^{1+\delta}$, 当 $t > 1/\varepsilon$ 时, $\beta(t) \leq S(t)$, 和如果 $\varepsilon^2 \log t \leq 1/B$ 以及 $\varepsilon \leq \varepsilon_0(h_0, K_0, C, B_0, B, \delta)$, 则有 $S(t) \leq C_1(h_0, K_0, C, B_0, B, \delta)\varepsilon$。因此，不论 K 的符号如何，如果 $t \in [1/\varepsilon, T]$, 我们总有

$$Z(t) \leq C_1\varepsilon \tag{6.1.67}$$

成立。如果当 $t > 1/\varepsilon$ 时总有 $Z_-(t) \geq 0$。由 (6.1.67), 如果 $t \in [1/\varepsilon, T]$ 和 $0 \leq Z_-(t) \leq z(t) \leq C_1\varepsilon$, $Z_-(t)$ 总存在。在这种情形就有引理成立。如果当 $t > 1/\varepsilon$ 时, $Z_-(t) \geq 0$ 不总成立，令 $t_1 = \inf\{t > 1/\varepsilon, Z_-(t) < 0\}$, 则 $Z_-(t_1) = 0$。容易验证，如果 $t > t_1$, 则 $Z_-(t) \leq 0$。如果 $K < 0$, 当 $t \geq t_1$ 时, 我们有 $Z'_-(t) \geq -|L(t)|$, 这就意味着 $z(t) \geq Z_-(t) \geq -C\varepsilon^{1+\delta}$。这样，我们可设 $K > 0$。如果 $\theta(t) = C\varepsilon^{1+\delta} - \int_{t_1}^t KZ_-^3(s)s^{-1}\mathrm{d}s$, 当 $t > t_1$ 时, $-Z_1(t) \leq \theta(t)$ 成立。显然，如果 $t > t_1$ 时, $\theta' \leq K\theta^3 t^{-1}$。因此，如果 $W' = KW^3 t^{-1}$, $W(t_1) = C\varepsilon^{1+\delta}$, 则当 $t > t_1$ 时, $\theta(t) \leq W(t)$。现在我们有 $W(t) = C\varepsilon^{1+\delta}(1 - 2KC^2\varepsilon^{2+2\delta}\log(t/t_1))^{-1/2}$。因此，我们得到，如果 $t > t_1$ 和 $2K_0C^2\varepsilon^{2+2\delta}\log(t/t_1) \leq 1/2$, 则 $Z_-(t)$ 存在。此外, $-Z_-(t) \leq C_2\varepsilon^{1+\delta}$。由于如果 $t \in [1/\varepsilon, t_1]$, $Z_-(t) \geq 0$, 由 (6.1.67), 在 $K_0 > 0$ 的情形, 如果 $4K_0C^2\varepsilon^{2+2\delta}\log(t/t_1) \leq 1$, 则当 $t \in [1/\varepsilon, T]$ 时

$$-C_2\varepsilon^{1+\delta} \leq Z_-(t) \leq z(t) \leq C_1\varepsilon.$$

由此立即可得引理成立。

对于充分小的 ε, (6.1.56) 的最后关系式意味着 $\Sigma_\varepsilon = \bigcup_{-M \leq \lambda \leq \lambda(m,1), \xi \in \mathbb{S}^1} w_{\lambda,\xi}$, 其中 $w_{\lambda,\xi}$ 是从 $t = \frac{1}{\varepsilon}$ 出发的半射线 $\{(t, (t+\lambda)\xi), t \geq \frac{1}{\varepsilon}\}$

因此，对 (6.1.65), (6.1.66) 应用引理便可得 $w = O^*(\varepsilon)$。

由 $p \leq 1/4$, (6.1.64) 意味着 $\partial_t v = O^*(\varepsilon t^{-\frac{1}{2}})$。利用 (6.1.58)(6.1.59) 和 $k \geq 3$ 的事实可得 (6.1.55) 对 $|\alpha| = 0$ 成立。

剩下的可用归纳证明对 $|\alpha| \leq k - 4$, (6.1.55) 成立。

假设 (6.1.55) 对 α 满足 $|\alpha| \leq l \leq k - 5$ 成立，我们要证 $|\alpha| = l + 1$ 时仍成立。在方程两边作用 Γ^α 得

$$\Box\Gamma^\alpha v = \Sigma_{\beta \leq \alpha, |\mu|=3} c_\beta \Gamma^\beta(\phi_\mu(v, v')v'^\mu), c_\alpha = 1.$$

由归纳假设并与上面证明类同，可以得到

$$(\partial_t + \partial_r + \frac{b}{2})w = O^*(\varepsilon^{1-2p}t^{-2} + \varepsilon^3 t^{-1}), \tag{6.1.68}$$

其中 $b = \Sigma_{j=0}^2 X_j b_j(v')$, b_j 是某一二次型, $w = (\partial_t - \partial_r + \frac{b}{2})(r^{\frac{1}{2}}\Gamma^\alpha v)$。

由于我们假设 $p \leq 1/4$, 对于 $t = \frac{1}{\varepsilon}$, 当 ε 充分小时，从 $\omega = r^{1/2}(\partial_t - \partial_r)\Gamma^\alpha v - \frac{1}{2}r^{-1/2}\Gamma^\alpha v + \frac{1}{2}br^{1/2}\Gamma^\alpha v$, 且对于 $t \leq C\varepsilon^{-2}$, $|\Gamma^\alpha v'(t,x)| \leq C\varepsilon(1+t)^{-1/2}$, 由 (6.1.56), (6.1.58) 可得

$$w = O^*(\varepsilon). \tag{6.1.69}$$

这样, (6.1.68) 是沿 $t-r=\lambda,-M\le\lambda\le\lambda(m,1)$ 的线性微分方程, 解该方程, 考虑到 (6.1.69), 就有 $r^{\frac{1}{2}}\partial_t\Gamma^\alpha v=O^*(\varepsilon)$ 。注意到 $p\le 1/4$, 由 (6.1.56),(6.1.58) 和 (6.1.60) 有

$$\partial_j\Gamma^\alpha v=O^*(\varepsilon t^{-\frac{1}{2}}),0\le j\le 2,|\alpha|=l+1. \tag{6.1.70}$$

这样证明了

$$\Gamma^\alpha v'=O^*(\varepsilon t^{-\frac{1}{2}}),|\alpha|\le l+1.$$

因此, 也就证明了断言。

由 (6.1.54), (6.1.55) 可得

$$\|v'(t)\|_{W^{k-4,\infty}}\le J(B)\varepsilon(1+t)^{-\frac{1}{2}},0\le t<T,\varepsilon\le\varepsilon_0(m,B). \tag{6.1.71}$$

第三步 (在这一步中 $J(B),\varepsilon_0(m,B)$ 在上下行中可能表示不同的正数)

因为 $k-4\ge[\frac{k}{2}],B\varepsilon^2\log(1+T)\le 1$, 所以由 命题 6.1.3 得

$$\sup_{0\le t<T}\|v'(t)\|_{H^k}\le J(B)\varepsilon.$$

再根据 Klainerman-Sobolev 不等式及当 $r\ge t+M$ 时 $v=0$ 的事实

$$|\Gamma^\alpha v'(t,x)|\le J(B)\epsilon(1+t)^{-\frac{1}{2}}(M+1+t-r)^{-\frac{1}{2}},\quad |\alpha|\le k-2,\epsilon\le\epsilon_0(m,B),0\le t<T. \tag{6.1.72}$$

这样完成了命题中对 v' 的估计。由 (6.1.72) 可得

$$\|v(t)\|_{W^{k-2,\infty}}\le J(B)\varepsilon,\quad \varepsilon\le\epsilon_0(m,B),0\le t<T. \tag{6.1.73}$$

为完成 命题 6.1.4 的证明, 我们还需证明断言: $\sup_{0\le t<T}(1+t)^{\frac{1}{2}}\|v(t)\|_{W^{k-3,\infty}}\le J(B)\epsilon$。

注意到 $\Box\Gamma^\alpha u=F^\alpha$,$F^\alpha=\sum_{\beta\le\alpha,|\mu|=3}C_\beta\Gamma^\beta(\phi_\mu(v,v')v'^\mu)$. 如果 w^α 是 Cauchy 问题 $\Box w^\alpha=0,0<t<T$, $\partial_t^j(w^\alpha-\Gamma^\alpha v)(0,\cdot)=0,j=0,1$ 的解, 由 Klainerman-Sobolev 不等式我们有 $(1+t)^{\frac{1}{2}}|w^\alpha(t,x)|\le C_\alpha\varepsilon$。因此若记 v^α 为

$$\begin{cases}\Box v^\alpha=F^\alpha, & 0<t<T,\\ \partial_t^j v^\alpha|_{t=0}=0, & 0\le j\le 1,\end{cases}$$

的解, 则断言归结为证明当 $0<t<T,\varepsilon\le\varepsilon_0(m,B),|\alpha|\le k-3$ 时,

$$(1+t)^{\frac{1}{2}}\|v^\alpha(t,x)\|_{L^\infty}\le J(B)\epsilon.$$

由 Duhamel 原理我们不难得到

$$(1+t)^{\frac{1}{2}}|v^\alpha(t,x)|\le C_\alpha\sum_{|\theta|\le 1}\int_0^t\int|\Gamma^\theta F^\alpha(s,y)|\mathrm{d}y(1+s)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}s.$$

$\Gamma^\theta F^\alpha$ 是形如 $\Gamma^\sigma(\phi_\mu(v,v'))\Gamma^\eta\partial_i v\Gamma^\zeta\partial_j v\Gamma^\rho\partial_l v$ 的项的线性组合，其中 $0\le i,j,l\le 2$, $\sigma+\eta+\zeta+\rho\le\theta+\alpha$ 且 $|\sigma|,|\eta|,|\rho|$ 中至多有一个 $>[\frac{k-2}{2}]$。而当 $0\le s\le t<T$, ϵ 小时 $|\Gamma^\sigma(\phi_\mu(v,v'))(s,y)|\le J(B)$, 所以

$$
\begin{aligned}
&\int\Gamma^\theta F^\alpha(s,y)dy\\
\le\ & J(B)\|v'(s)\|_{W^{[\frac{k-2}{2}],\infty}}\|v'(s)\|_{W^{[\frac{k-2}{2}],\infty}}\|v'(s)\|_{H^{k-2}}\\
\le\ & J(B)\varepsilon^3(1+s)^{-\frac12}.
\end{aligned}
$$

因此, 由 $B\varepsilon^2\log(1+T)\le 1$ 便可得断言的证明, 从而完成 命题 6.1.4 的证明。

推论 6.1.1 若 $B>A_2$, $k\in\mathbb{N}$, 则存在 $\varepsilon_k(B)>0$, $\gamma_k(B)>0$ 使得：如果 $v\in C^\infty([0,T[\times\mathbb{R}_x^2)$ 是问题 (6.1.45) 满足 $B\varepsilon^2\log(1+T)\le 1$ 和 $\varepsilon\le\varepsilon_k(B)$ 的解, 则 $\|v\|_{W^{k,\infty}}\le\gamma_k(B)\varepsilon(1+t)^{-1/2}$ 在 $0\le t<T$ 中成立。

证明 我们设 $k\ge 7$, 定义 $\mathcal{E}=\{t\in[0,T[,\sup_{0\le s<t}\left((1+s)^{1/2}\|v(s)\|_{W^{[\frac{k}{2}],\infty}}\right)\le 2J_k(B)\varepsilon\}$。如果 $J_k(B)$ 大, ε 小, 则由局部存在唯一性理论 $\mathcal{E}\ne\emptyset$。显然, $\mathcal{E}$ 是 $[0,T)$ 中的相对闭集。为说明它是开集, 我们令 $a_k>0$ 是使得不等式 $\|\phi'(t)\|_{W^{[\frac{k}{2}],\infty}}\le a_k\|\phi(t)\|_{W^{[\frac{k}{2}]+1,\infty}}$ 对所有 $t\ge 0$ 和 $\phi\in C_0^\infty(\mathbb{R}_t\times\mathbb{R}_x^2)$ 成立。如果 $\varepsilon\le\varepsilon(2a_kJ_k(B),B)$ 和 $2J_k(B)\varepsilon\le\delta$, 则由 命题 6.1.4 知 $\mathcal{E}$ 是 $[0,T)$ 中的相对开集。这样, 当 $\varepsilon\le\varepsilon_k(B)$ 时 $\mathcal{E}=[0,T)$。

事实上, 我们可以得到更强的结论

推论 6.1.2 如果 $B>A_2$, 则 $\exists\varepsilon^*(B)$, 且对任一 $k\in\mathbb{N}$,$\exists\gamma_k(B)>0$, 使得如果 $v\in C^\infty([0,T)\times\mathbb{R}^2)$ 是 (6.1.45) 的解, 其中 $B\varepsilon^2\log(1+T)\le 1,\varepsilon\le\varepsilon^*(B)$, 则

$$|v(t)|_k\le\gamma_k(B)\varepsilon(1+t)^{-\frac12},(0\le t<T).$$

证明 固定 $k>3$, 如果 $\varepsilon\le\varepsilon_k(B)$, 由 推论 6.1.1 得 $\|v(t)\|_{L^\infty}+\|v'(t)\|_{L^\infty}\le\delta$(这里的 δ 是 命题 6.1.3 中的 δ) 且 $\|v'(t)\|_{W^{k-1,\infty}}\le\gamma^*(B)\varepsilon(1+t)^{-\frac12},(t<T)$。

再由 命题 6.1.3 , $\|v'(t)\|_{H^{2k-2}}\le\gamma^{**}(B)\varepsilon$, 并有当 $|\alpha|\le 2k-4$ 时,

$|\Gamma^\alpha v'(t,x)|\le\gamma_0(B)\varepsilon(1+t)^{-\frac12}(M+1+t-r)^{-\frac12}$。

重复这一过程, 对 $\varepsilon\le\varepsilon_k(B),|\alpha|\le 2k_j-4,j\in\mathbb{N}$, 我们有 $|\Gamma^\alpha v'(t,x)|\le\gamma_j(B)\epsilon(1+t)^{-\frac12}(M+1+t-r)^{-\frac12}$, 其中 $k_0=k,k_j=2k_{j-1}-3=2^j(k-3)+3,j\ge 1$。重复 (6.1.72) 后面部分可以得到 $\Gamma^\alpha v$ 的估计, 从而完成证明。

定理 6.1.6 的证明 固定 $k>1,B>A_0$, 则存在 $\gamma_k(B)$ 和 $\varepsilon_k(B)$, 使若 $v\in C^\infty([0,T)\times\mathbb{R}^2)$ 是 (6.1.45) 满足 $B\varepsilon^2\log(1+T)\le 1$ 和 $\varepsilon\le\varepsilon_k(B)$ 的解, 则当 $0\le s<t$ 时, $\|v(t)\|_{W^{k,\infty}}\le\gamma_k(B)\varepsilon(1+s)^{-1/2}$。设 $\varepsilon\le\varepsilon_k(B)$, 记 $\mathcal{E}=\{t\in[0,-1+e^{\frac{1}{B\varepsilon^2}}):$ 当$0\le s\le t$时$,\|v(s)\|_{W^{k,\infty}}\le\gamma_k(B)\varepsilon(1+t)^{-1/2}\}$。显然, $\mathcal{E}$ 是 $[0,-1+e^{\frac{1}{B\varepsilon^2}})$ 中的相对闭集。因为 $\|v(0)\|_{W^{k,\infty}}\le C_k\varepsilon$。所以 $\mathcal{E}\ne\emptyset$。若 $t_0\in\mathcal{E}$, 则 $\sup_{0\le s\le t_0}\|v(s)\|_{W^{k,\infty}}<\infty$, 由局部存在性定理, 存在 $\delta>0$, 使得 $v\in C^\infty([0,t_0+\delta)\times\mathbb{R}^2)$ 是 (6.1.45) 的解且 $t_0+\delta<-1+e^{\frac{1}{B\varepsilon^2}}$。这样根据 推论 6.1.1, 当 $0\le s<t_0+\delta$ 时, $\|v(s)\|_{W^{k_0,\infty}}\le 2\gamma_k(B)\varepsilon(1+s)^{-1/2}<\infty$。故 t_0 是内点, 从而 $\mathcal{E}$ 是相对开集。所以有解的生命区间 $T(\varepsilon)\ge -1+e^{\frac{1}{B\varepsilon^2}}$, 由此得 $\liminf_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^2\log T(\varepsilon)\ge\frac{1}{A_2}$。

注 6.1.1 结论 $\liminf_{\varepsilon\to 0}\varepsilon T_\varepsilon^{1/2}\geq 1/A_1$ 可由类似于上面定理的证明得到，且更为简单。这时只要用简单的能量不等式

$$\|u'(t)\|_{H^k}\leq C_k\|u'(0)\|_{H^k}e^{C_{k,R}\int_0^t\|u(s)\|^2_{W^{[k/2],\infty}}ds}$$

和 (6.1.65) 的类似物

$$(\partial_t+\partial_r)w-\frac{F_2(x)}{4}t^{-\frac{1}{2}}w^2=O^*(\varepsilon^{2-3p}t^{-\frac{3}{2}}+\varepsilon^{3-4p}t^{-1}+\varepsilon^{1-2p}t^{-2})$$

即可。

定理 6.1.7 的证明 由对 F 的假设知，对 $q=(q_0,q_1,q_2)$ 小，$F(q)=cQ(q)+L(q)Q(q)+H(q)$, 其中 $c\in\mathbb{R}.Q(q)=q_0^2-q_1^2-q_2^2,L(q)=\langle a,q\rangle$ $(a\in\mathbb{R}^3)$ 是线性形式，$H\in C^\infty$ 且 $H(q)=O(|q|^4)$(当 $|q|\to 0$). 令 $v=(1-e^{-cu})/c$, 则有

$$\begin{cases}\Box v=(1-cv)^{-2}L(v')Q(v')+(1-cv)H((1-cv)^{-1}v'),\\ v|_{t=0}=(1-e^{-c\epsilon f})/c,v_t|_{t=0}=\epsilon g e^{-c\epsilon f},\end{cases}\tag{6.1.74}$$

对于 $z\in C^\infty([0,T)\times\mathbb{R}^2)$, 记 $E_T(z)$ 为 Cauchy 问题

$$\begin{cases}\Box E_T(z)=z,0\leq t<T,x\in\mathbb{R}^2,\\ \partial_t^jE_T(z)=0,t=0,0\leq j\leq 1,x\in\mathbb{R}^2,\end{cases}$$

的解。为了研究 (6.1.74) 需要以下引理：

引理 6.1.4 存在 $c>0$ 满足下面性质：如果 $b\in\mathbb{R}$, $T>0$ 且 $u_j\in C^\infty([0,T)\times\mathbb{R}^2)$ 对于每一固定 t, 作为 x 的函数具有紧支集，则

$$(1+t)|E_T(u_1u_2)(t,x)|^2\leq C(\sum_{|\alpha|\leq 1}\int_0^t\frac{\|\Gamma^\alpha u_1(s)\|^2_{L^2}}{(1+s)^b}\mathrm{d}s)(\sum_{|\alpha|\leq 1}\int_0^t\frac{\|\Gamma^\alpha u_2(s)\|^2_{L^2}}{(1+s)^{1-b}}\mathrm{d}s).$$

证明 由 Duhamel 原理，不难得到

$$(1+t)^{\frac{1}{2}}|E_T(u_1u_2)(t,x)|\leq C\sum_{|\beta|\leq 1}\int_0^t(\int\Gamma^\beta(u_1u_2)(s,y)\mathrm{d}y)\frac{\mathrm{d}s}{(1+s)^{\frac{1}{2}}}.$$

而

$$|\frac{\Gamma^\beta(u_1u_2)(s,y)}{(1+s)^{\frac{1}{2}}}|\leq(\sum_{|\alpha|\leq 1}\frac{\Gamma^\alpha u_1(s,y)}{(1+s)^{\frac{b}{2}}})(\sum_{|\alpha|\leq 1}\frac{\Gamma^\alpha u_2(s,y)}{(1+s)^{\frac{1-b}{2}}}).$$

再用 Cauchy-Schwarz 不等式，便可得结论。

设 $\delta>0$ 充分小，使得若 $|v|+|v'|\leq\delta$, 则 H 在 $(1-cv)^{-1}v'$ 的某邻域上有定义，固定 $k\in\mathbb{N}$, 使得 $k\geq 5$。

令 $\tau_\epsilon=\{t>0:(6.1.74)有解v\in C^\infty([0,t)\times\mathbb{R}_x^2)且|v|+|v'|\leq\delta\}$。

设 $\varphi(t,x,\epsilon),\psi(t,x,\varepsilon)$, 当 $0\leq t<\tau_\varepsilon$, $x\in\mathbb{R}^2$, ε 小时有定义。

这一节 $\varphi = O^*(\psi)$ 是指, 如果存在 $\epsilon_0(m) > 0, J > 0$(都与 T 无关) 使得不等式

$$\sup_{0\le t<T}(1+t)^{\frac{1}{2}}\|v(t)\|_{W^{[\frac{k}{2}]+1,\infty}} \le m\epsilon, T < \tau_\epsilon, \epsilon \le \epsilon_0(m)$$

成立意味着 $\|\varphi(t,x,\epsilon)\|_{L^\infty} \le J\|\psi(t,x,\epsilon)\|_{L^\infty}, (t < T)$, 则定理 6.1.7 可由以下命题通过连续性讨论得到:

命题 6.1.5 $\|v(t)\|_{W^{[\frac{k}{2}]+1,\infty}} = O^*(\epsilon(1+t)^{-\frac{1}{2}})$。

证明 记 K 为 (6.1.74) 第一式的右端部分, 则 $\Box\Gamma^\alpha v = \sum_{\beta\le\alpha} C_\beta\Gamma^\beta K$,$C_\beta \in \mathbb{R}$。记 $E = E_{\tau_\varepsilon}$,E_{τ_ε} 如引理中所定义, 如果 w^α 是 Cauchy 问题

$$\begin{cases} \Box w^\alpha = 0, & 0 < t < \tau_\varepsilon, \\ \partial_t^j(w^\alpha - \Gamma^\alpha v)|_{t=0} = 0, & 0 \le j \le 1, \end{cases}$$

的解, 则 $\Gamma^\alpha v = w^\alpha + \sum_{\beta\le\alpha} C_\beta E\Gamma^\beta K$。如 命题 6.1.1 证明过程中提到的, 对 ε 小, $|w^\alpha(t,x)| \le C_\alpha\varepsilon(1+t)^{-\frac{1}{2}}$。因此, 为了证明 命题 6.1.5, 只需要证明对 $|\beta| \le [\frac{k}{2}]+1$, 有 $E\Gamma^\beta K = O^*(\varepsilon(1+t)^{-\frac{1}{2}})$。而它又可以从以下两个估计得到:

$$E\Gamma^\beta((1-cv)^{-2}L(v')Q(v')) = O^*(\varepsilon^2(1+t)^{-\frac{1}{2}}), \tag{6.1.75}$$

$$E\Gamma^\beta((1-cv)H((1-cv)^{-1}v')) = O^*(\varepsilon^2(1+t)^{-\frac{1}{2}}). \tag{6.1.76}$$

以下将证明这两个估计:

假设对 $0 \le t < T < \tau_\varepsilon$,

$$\|v(t)\|_{W^{[\frac{k}{2}]+1,\infty}} \le m\varepsilon(1+t)^{-\frac{1}{2}}. \tag{6.1.77}$$

则由 命题 6.1.4 得, 对于 $0 \le t < T, m\varepsilon \le 1$, $2C_{k,1}m^2c^2 \le p < 1/4$。有

$$\|v'(t)\|_{H^k} \le \widetilde{C}\varepsilon(1+t)^p. \tag{6.1.78}$$

这里 $\widetilde{C}$ 与 ε, m, T, p 无关, $C_{k,1}$ 是 命题 6.1.4 中的常数。

(6.1.75) 的证明: 设 $\delta > 0$ 待定并令 $\varphi(v) = (1-cv)^{-2}$, 在引理中令 $b = 1+\delta$, 得

$$(1+t)^{\frac{1}{2}}\|E\Gamma^\beta(\varphi(v)L(v')Q(v'))(t,x)\|_{L^\infty} \le C\sum_{\lambda+\sigma=\beta} I_\lambda(t)J_\sigma(t),$$

其中

$$I_\lambda(t) = (\sum_{|\theta|\le 1}\int_0^t \|\Gamma^\theta\Gamma^\lambda v'(s)\|_{L^2}^2(1+s)^{-1-\delta}\mathrm{d}s)^{\frac{1}{2}},$$

$$J_\sigma(t) = (\sum_{|\theta|\le 1}\int_0^t \|\Gamma^\theta\Gamma^\sigma(\varphi(v)Q(v'))(s)\|_{L^2}^2(1+s)^{\delta}\mathrm{d}s)^{\frac{1}{2}}.$$

设 $\delta > 2p$, 因为 $\Gamma^\theta\Gamma^\lambda = \sum_{\gamma\le\theta+\lambda} C_\gamma\Gamma^\gamma$, $C_\gamma \in \mathbb{R}$,$k\ge 3$, 所以，由 (6.1.78),

$$I_\lambda(t) \le C\varepsilon, \quad \text{其中}\epsilon \le \varepsilon_0(m), 0\le t< T, C\text{与}\varepsilon, m, T\text{无关}. \tag{6.1.79}$$

接下来我们验证：如果 $\varepsilon \le \varepsilon_0(m)$, $0<t<T$, 则存在与 m,ε 无关的 C, 使得

$$\|(\Gamma^\theta\Gamma^\sigma(\varphi(v)Q(v')))(t)\|_{L^2} \le Ct^{-1}(1+t^{-[\frac{k}{2}]-2})\|v'(t)\|_{W^{[\frac{k}{2}]+3,\infty}}. \tag{6.1.80}$$

首先，对于 $t\ne 0$, 将 Q 写成 $Q(v') = t^{-1}\sum c_{ij}\Gamma_i v\partial_j v$, $c_{ij}\in\mathbb{R}$, 所以若令 $\psi(v) = v(1-cv)^{-1}$, 则 $\psi' = \varphi$; $\varphi(v)Q(v') = t^{-1}\sum c_{ij}\Gamma_i(\psi(v))\partial_j v$.

因此，当 $t\ne 0$ 时，$\Gamma^\theta\Gamma^\sigma(\varphi(v)Q(v'))$ 是形如 $\Gamma^\mu(t^{-1})\Gamma^\rho\Gamma_i(\psi(v))\Gamma^\omega\partial_j v$,$\mu+\rho+\omega\le\theta+\sigma$ 的线性组合，由于 $|x|\ge t+M$ 时，$v=0$, 我们得到

$$\|(\Gamma^\theta\Gamma^\sigma(\varphi(v)Q(v')))(t)\|_{L^2} \le Ct^{-1}(1+t^{-|\theta+\sigma|})\sum_{\substack{\rho+\omega\le\theta+\sigma\\ i,j}}\|(\Gamma^\rho\Gamma_i(\psi(v))\Gamma^\omega\partial_j v)(t)\|_{L^2}.$$

为了方便，记 $[\frac{k}{2}]+2 = l$。则上式中 $|\theta+\sigma|\le l$。

如果 $|\omega| > [\frac{|\theta+\sigma|}{2}]$, $\epsilon\le\varepsilon_0(m)$, 则

$$\|(\Gamma^\rho\Gamma_i\psi(v)\Gamma^\omega\partial_j v)(t)\|_{L^2} \le C|v(t)|_{W^{[\frac{l}{2}]+1,\infty}}\|v'(t)\|_{H^l}.$$

如果 $|\omega|\le[\frac{|\theta+\sigma|}{2}]$, 则由前面的脚注，

$$\|(\Gamma^\rho\Gamma_i\psi(v)\Gamma^\omega\partial_j v)(t)\|_{L^2} \le C|v(t)|_{W^{[\frac{l}{2}]+1,\infty}}\|\varphi(v)v'\|_{H^{l+1}}.$$

令 $\varphi_1(v) = \varphi(v)-\varphi(0)$, 则 $\|(\varphi(v)v')(t)\|_{H^{l+1}} \le C\|v'(t)\|_{H^{l+1}} + \|(\varphi_1(v)v')(t)\|_{H^{l+1}}$。所以当 $\varepsilon\le\varepsilon_0(m)$ 时，$\|(\varphi(v)v')(t)\|_{H^{l+1}} \le C(\|v'(t)\|_{H^{l+1}} + \|v'(t)\|_{W^{[\frac{l+1}{2}],\infty}}\|v(t)\|_{H^{l+1}})$。

由于当 $|x|\ge t+M$ 时，$v=0$, 我们有 $\|v(t)\|_{H^{l+1}} \le C(t+M)\|v'(t)\|_{H^{l+1}}$。从而由 (6.1.77) 和 $k\ge 4$ 得当 $\varepsilon\le\varepsilon_0(m)$ 时，

$$\begin{aligned}\|(\varphi(v)v')(t)\|_{H^{l+1}} &\le C(1+(t+M))\|v'(t)\|_{W^{[\frac{l+1}{2}],\infty}}\|v'(t)\|_{H^{l+1}}\\ &\le C(1+t)^{\frac12}\|v'(t)\|_{H^{l+1}}.\end{aligned} \tag{6.1.81}$$

从而 (6.1.80) 得证。

由 $k\ge 5$ 及 (6.1.78)(6.1.79) 得，对 $\varepsilon\le\varepsilon_0(m)$, $0<t<T$,

$$\|(\Gamma^\theta\Gamma^\sigma(\varphi(v)Q(v')))(t)\|_{L^2} \le Ct^{-1}(1+t^{-[\frac{k}{2}]-2})(1+t)^p\varepsilon, \tag{6.1.82}$$

其中 C 与 ε, m, T 无关。

另一方面：当 t 接近于 0, ε 充分小时，

$$\|\Gamma^\theta\Gamma^\sigma(\varphi(v)Q(v'))(t)\| \le C\varepsilon. \tag{6.1.83}$$

故由 (6.1.82)(6.1.83), 并取 $\delta<1-2p$, 得 $J_\sigma(t)\le C\varepsilon$。

这样，估计 (6.1.74) 可由 (6.1.79) 及 (6.1.83) 得到。

(6.1.76) 的证明：由 Taylor 公式，$(1-cv)H((1-cv)^{-1}v')=\sum_{|\mu|=4}\phi_\mu(v,v')v'^\mu$，其中 ϕ_μ 在原点附近光滑，$v'^\mu=\prod_{j=0}^2(\partial_j v)^{\mu_j}, \mu=(\mu_0,\mu_1,\mu_2)$，如果 $|\mu|=4$，$\Gamma^\beta(\phi_\mu(v,v')v'^\mu)$ 是形如

$$\Gamma^\lambda(\partial_j v)\cdot\Gamma^\sigma(\phi_\mu(v,v')v'^\tau), \lambda+\sigma=\beta, |\tau|=3$$

的项的线性组合。

设 $\delta>0$ 待定，在引理中取 $b=1+\delta$，得

$$(1+t)^{\frac{1}{2}}|E\Gamma^\beta(\phi_\mu(v,v')v'^\mu)(t,x)|\leq C\sum_{\lambda+\sigma=\beta}I_\lambda(t)L_\sigma(t)$$

其中 $I_\lambda(t)$ 与前面一样，$L_\sigma(t)=(\sum_{|\theta|\leq 1}\int_0^t\|\Gamma^\theta\Gamma^\sigma(\phi_\mu(v,v')v'^\tau)(s)\|_{L^2}^2(1+s)^\delta ds)^{\frac{1}{2}}$ (6.1.79) 对于 $\delta>2p, \varepsilon\leq\varepsilon_0(m), 0\leq t\leq T$ 同样成立。

由 (6.1.47) 及 (6.1.77)，对 $\varepsilon\leq\varepsilon_0(m)$，有

$$\|\Gamma^\theta\Gamma^\sigma(\phi_\mu(v,v')v'^\tau)(t)\|_{L^2}\leq C(1+t)^{-1}\|v'(t)\|_{W^{[\frac{k}{2}]+2,\infty}},$$

这里 C 与 ε, m, T 无关。

进一步，对 $k\geq[k/2]+2$ 成立。取 $\delta<1-2p$，由 (6.1.78)，当 $\varepsilon\leq\varepsilon_0(m)$，$0\leq t<T$ 时，$L_\sigma(t)\leq C\varepsilon$。故 (6.1.76) 成立。

§6.2　具小初值的非线性 Klein-Gordon 方程

这一节我们主要介绍 Klainerman 和 Shatah 关于当空间维数 $n\geq 3$ 时具小初值的非线性 Klein-Gordon 方程

$$\Box u+u=F(u,u',u''), \tag{6.2.1}$$

其中 F 在原点二阶为 0，F 关于 u'' 线性，整体解的存在性定理。他们的证明方法分别称为不变向量场方法和法形式方法，这两种方法以及它们的组合已构成 Klein-Gordon 方程研究的主要方法。Klein-Gordon 方程与波动方程相比有三个方面的不同：首先，在能量的表示中含有 u 的 L^2 范数，这会反映在非线性项 F 与方程的线性部分的干扰上；其次，衰减率比波动方程要快；另外，它与径向向量场 L_0 不能交换。这部分的主要内容取材于 [21]。

考虑 Klein-Gordon 方程

$$\Box u+u+\sum_{j,k=0}^n\gamma^{jk}(x)\partial_j\partial_k u=f, \tag{6.2.2}$$

其中 $x_0=t$。在方程两边同乘 $2u_t$ 再关于 x 积分我们不难得到如下的能量估计 (6.2.3)。

引理 6.2.1 设 u 是 Klein-Gordon 方程 (6.2.2) 的解，如果 $\sum_{j,k=0}^{n}|\gamma^{jk}|\le\frac{1}{2}$，且对于大的 $|x|$，$u=0$，则

$$\begin{aligned}&\left(\|u'(t,\cdot)\|_{L^2}^2+\|u(t,\cdot)\|_{L^2}^2\right)^{1/2} \qquad (6.2.3)\\ \le\ & 2\left[\left(\|u'(0,\cdot)\|_{L^2}^2+\|u(0,\cdot)\|_{L^2}^2\right)^{1/2}+\int_0^t\|f(s,\cdot)\|_{L^2}\mathrm{d}s\right]\exp\left(\int_0^t 2\Gamma(s)\mathrm{d}s\right),\end{aligned}$$

其中 $\Gamma(s)=\sum_{i,j,k=0}^{n}\sup|\partial_i\gamma^{jk}(s,\cdot)|$。

6.2.1　经典的能量方法

利用 定理 3.5.3 中的 L^∞ 估计和上面的能量估计，我们可以用连续性方法证明下面的经典结果

定理 6.2.1 设方程 (6.2.1) 中的 $F\in C^\infty$ 在原点有 3 阶零点，空间维数 $n\ge 3$，则具初始条件

$$u(0,x)=\varepsilon u_0,\partial_t u(0,x)=\varepsilon u_1 \tag{6.2.4}$$

的方程 (6.2.1)，对于 $u_0,u_1\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 以及充分小的 ε 有解 $u\in C^\infty(\mathbb{R}^{1+n})$。

证明　设 s 是大于或等于 $2n+6$ 的整数，我们只要对于 $t\ge 0$ 证之。解的局部存在性是已知的，而对于整体存在性，我们将用连续性方法证明之。即若存在一个依赖于 u_0,u_1 而不依赖于 ε,T 的一个数 M，如果下面的不等式成立

$$\sum_{|\alpha|\le s+1}\|\partial_{t,x}^\alpha u(t,\cdot)\|_{L^2}\le M\varepsilon,\ 0\le t\le T, \tag{6.2.5}$$

$$\sum_{|\alpha|\le s/2+2}\sup_x|\partial_{t,x}^\alpha u(t,x)|\le M\varepsilon(1+t)^{-n/2},\ 0\le t\le T. \tag{6.2.6}$$

则只要 ε 足够小，用 $M/2$ 取代 M 上述不等式也成立。

为证 (6.2.5) 用 $M/2$ 取代 M 也成立，用 ∂^α, $0<|\alpha|\le s$, 作用到方程 (6.2.1) 可得

$$\left(\square+\sum_{j,k=0}^{n}\gamma^{jk}\partial_j\partial_k+1\right)\partial^\alpha u=f_\alpha, \tag{6.2.7}$$

其中 $\gamma^{jk}=-\partial F/\partial u''_{jk}$ 和 f_α 仅依赖于 u 的 $\le|\alpha|+1$ 阶导数。令 $f_0=F$，由于 F 在原点 3 阶为零，从 (6.2.6) 可得

$$|\gamma^{jk}(t,x)|\le C(M\varepsilon)^2(1+t)^{-n},\ |\partial_{t,x}\gamma^{jk}(t,x)|\le C(M\varepsilon)^2(1+t)^{-n},\ 0\le t\le T.$$

因此，由能量不等式 (6.2.3) 可得

$$\sum_{|\beta|\le s+1}\|\partial^\beta u(t,\cdot)\|_{L^2}\le C\left(\varepsilon+\sum_{|\alpha|\le s}\int_0^t\|f_\alpha(s,\cdot)\|_{L^2}\mathrm{d}s\right). \tag{6.2.8}$$

由 Taylor 公式, (6.2.5),(6.2.6) 以及 $\int_0^\infty (1+t)^{-n} dt < \infty$ 我们可得 (6.2.8) 右端的估计

$$\sum_{|\alpha| \le s+1} \|\partial^\alpha u(t,\cdot)\|_{L^2} \le C\varepsilon + C'(\varepsilon M)^3, \ 0 \le t \le T.$$

如果 $M > 2C$, 则对于 ε 足够小, 不等式 (6.2.5) 用 $M/2$ 取代 M 时成立。

为证 (6.2.6) 相应的改善, 我们将方程写成

$$(\Box + 1)\partial^\alpha u = F_\alpha,$$

其中 F_α 是 3 阶为零且包含 $\le |\alpha|+2$ 阶导数。如果 $|\alpha| \le s/2+2, s \ge 2n+6$, 则 $|\alpha|+2+n \le s+1$。对于每一项 $\partial_x^\beta F_\alpha, |\beta| \le n$, 我们都能用满足 (6.2.5) 的两个因子和满足 (6.2.6) 的一个因子的乘积来估计。因此, $\int |\partial_x^\beta F_\alpha(t,x)| dx \le C(M\varepsilon)^3(1+t)^{-n/2}$. 注意到

$$\begin{aligned} \int_0^t (1+t-s)^{-n/2}(1+s)^{-n/2} ds &= 2\int_0^{t/2} (1+t-s)^{-n/2}(1+s)^{-n/2} ds \\ &\le 2^{1+n/2}(1+t)^{-n/2} \int_0^{t/2} (1+s)^{-n/2} ds \end{aligned}$$

当 $n \ge 3$ 时是有界的, 我们用 定理 3.5.3 的不等式得

$$\sum_{|\alpha| \le s/2+2} \sup_x |\partial_{t,x}^\alpha u(t,x)| \le C(\varepsilon + (M\varepsilon)^3)(1+t)^{-n/2}, \ 0 \le t \le T,$$

其中 C 与 M 和 ε 无关。如果 $M > 2C$, 即得当 ε 小时用 $M/2$ 取代 M 的不等式 (6.2.6) 成立。

6.2.2 Klainerman 的不变向量场方法

为介绍 Klainerman 定理 ([34]), 我们设 u 是 Klein-Gordon 方程

$$\Box u + u = f \tag{6.2.9}$$

具初值之支集在 $\{x; |x| \le B\}$ 中的解。我们可以关于时间作一个平移, 使初始时刻移至 $t = 2B$, 即

$$u(2B,\cdot) = u_0, \ \partial_t u(2B,\cdot) = u_1. \tag{6.2.10}$$

如果 $f = 0$, 则当 $t \ge 2B$ 时, 有

$$\text{supp} u \subset \{(x,t) | |x| \le t - B\}. \tag{6.2.11}$$

如果 $\text{supp} f \subset \{(x,t)||x| \le t-B\}$, 这对非齐次方程也成立。

将其用于 (6.2.1), (6.2.11) 意味着 $\rho^2 = t^2 - |x|^2 \ge B(t+|x|) \ge 2B^2, (t,x) \in \text{supp} f$。对于某个 $T \ge 2B$, 记 $G_T = \{(t,x); t \ge 2B, t^2 - |x|^2 \le T^2\}$ 和 $H_T = \{(t,x); t^2 - |x|^2 = T^2\}$。

将方程 $\Box u+u=f$ 两边同乘 $2u_t$, 并在 G_T 上积分，得

$$E(T;u)=\int_{H_T}(|u'|^2+2u_t\langle u_x,x/t\rangle+|u|^2)\mathrm{d}x=\int_{G_T}2fu_t\mathrm{d}t\mathrm{d}x+E_0(2B;u),\quad(6.2.12)$$

其中 $E_0(T;u)=\int(|u'(T,x)|^2+|u(T,x)|^2)\mathrm{d}x$ 是 Klein-Gordon 方程的标准的能量。

注意到 H_T 是类空的，$E(T;u)$ 的被积函数是正的，这是由于我们可将它写成

$$|\partial u/\partial t+x/t\partial u/\partial t|^2+(\partial u/\partial t)^2\rho^2/t^2+|u|^2,\ \rho^2=t^2-|x|^2.\quad(6.2.13)$$

关于 T 微分可得

$$\frac{\partial}{\partial T}\mathrm{H}((T^2+|x|^2)^{1/2}-t)=T(T^2+|x|^2)^{-1/2}\delta((T^2+|x|^2)^{1/2}-t),$$

其中 H 是 Heaviside 函数。简记 $E(T;u)=E(T)$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial E(T)}{\partial T}&=2\int_{H_T}f\frac{\partial u}{\partial t}\frac{T}{t}\mathrm{d}x\\&\le(\int_{H_T}f^2\mathrm{d}x)^{1/2}(\int_{H_T}(\frac{\partial u}{\partial t})^2\frac{\rho^2}{t^2})^{1/2}\le 2(\int_{H_T}f^2\mathrm{d}x)^{1/2}E(T)^{1/2}.\end{aligned}$$

这样

$$E(T)^{1/2}\le E(2B)^{1/2}+\int_{2B}^{T}\mathrm{d}s\left(\int_{H_T}f^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}.\quad(6.2.14)$$

在 $G_{2B}\cap\mathrm{supp}u$ 中我们有 $t<5B/2$, 这样标准的能量估计

$$E_0(t)^{1/2}\le E_0(2B)^{1/2}+\int_{2B}^{t}\|f(s,\cdot)\|\mathrm{d}s$$

意味着

$$\begin{aligned}E(2B)&\le 2\int_{2B}^{5B/2}\|f(s,\cdot)\|\mathrm{d}s\left(E_0(2B)^{1/2}+\int_{2B}^{5B/2}\|f(s,\cdot)\|\mathrm{d}s\right)+E_0(2B)\\&\le 2\left(E_0(2B)^{1/2}+\int_{2B}^{5B/2}\|f(s,\cdot)\|\mathrm{d}s\right)^2.\end{aligned}$$

由此代入 (6.2.14) 即得 $E(T)$ 的一个好的估计。以后我们通常忽略这一能量在 G_{2B} 中的估计。

用 Γ^I 记如下非齐次 Lorentz 群李代数的生成元 $\partial/\partial t,\partial/\partial x_j$, $j=1,\cdots,n$, $t\partial/\partial x_j+x_j\partial/\partial t, x_j\partial/\partial x_k-x_k\partial/\partial x_j, j,k=1,\cdots,n$ 的任何乘积。我们希望得到 $\int_{H_T}|\Gamma^I u|^2\mathrm{d}x$ 由 $\Gamma^I u$ 的初值和 $\Gamma^I f$ 的估计。为用 L^2 型范数来估计 L^∞ 范数，需证明如下的 Sobolev 不等式

$$\sup_{H_T}t^n|u(t,x)|^2\le C\sum_{|I|\le\nu}\int_{H_T}|\Gamma^I u|^2\mathrm{d}x,\quad(6.2.15)$$

其中 ν 是大于 $n/2$ 的最小整数，$u\in H^\nu$，$T\geq 2B$。

事实上，对于 H_T 上的 x，向量场 $t\partial/\partial x_j+x_j\partial/\partial t$ 的作用相当于当 $t=(T^2+|x|^2)^{1/2}$ 时 $t\partial/\partial x_j$ 的作用，这是由于这时的 $x_j=t\partial t/\partial x_j$。因为对每个 α，$\partial^\alpha t=O(t^{1-|\alpha|})$, (6.2.15) 右端的和可以由

$$\sum_{|\alpha|\leq\nu}\int(T^2+|x|^2)^{|\alpha|}|\partial^\alpha U(x)|^2\mathrm{d}x, U(x)=u((T^2+|x|^2)^{1/2},x)$$

的常数倍来控制。用中心在 x_0, 半径为 $t_0=\frac{1}{2}(T^2+|x_0|^2)^{1/2}$ 的球上的标准的 Sobolev 不等式，注意到 $(T^2+|x+x_0|^2)^{1/2}\geq 2t_0-|x|\geq t_0$, $|x|<t_0$, 我们即可得证 (6.2.15)。

为估计形如 $|\Gamma u|^2/t^2$ 的量，我们用 τ 和 ξ 分别记 $\partial u/\partial t$ 和 $\partial u/\partial x$。注意到

$$\tau^2+|\xi|^2+2\tau\langle x/t,\xi\rangle=|\xi+\tau x/t|^2+(1-|x|^2/t^2)\tau^2,$$

和

$$x_j\xi_k-x_k\xi_j=x_j(\xi_k+\tau x_k/t)-x_k(\xi_j+\tau x_j/t),$$

角导数向量场就对应于

$$t(\xi_j+\tau x_j/t), x_j\xi_k-x_k\xi_j, j,k=1,\cdots,n.$$

如果 Γ 是角导数向量场，$|\Gamma u|^2/t^2$ 可由 (6.2.13) 估计；如果 Γ 是平移不变向量场的生成元，可由下式估计

$$(\tau^2+|\xi|^2)\rho^2/2t^2\leq(\tau^2+|\xi|^2)(1-|x|/t)\leq\tau^2+|\xi|^2+2\tau\langle x/t,\xi\rangle.$$

如果 u 是 (6.2.9),(6.2.11) 的解，组合 (6.2.15) 和 (6.2.14) 可得

$$\sup_{H_T}t^{n/2}|u(x,t)|\leq C\sum_{|I|\leq\nu}\left(E(2B;\Gamma^I u)^{1/2}+\int_{2B}^T(\int_{H_s}|\Gamma^I f|^2\mathrm{d}x)^{1/2}\mathrm{d}s\right).$$

为考察扰动以后方程的能量估计，我们设 u 是方程

$$\Box u+u+\sum_{j,k=0}^n\gamma^{jk}(t,x)\partial_j\partial_k u+\sum_{j=0}^n\gamma^j(t,x)\partial_j u=f$$

满足 (6.2.10) 的解，其中的 γ 要求适当的小。如果对于某 $\mu\geq 1$，如下条件

$$\sup\sum_{j,k=0}^n|\gamma^{jk}(t,x)|t^2/\rho^2\leq c_n$$

和

$$\sum_{i,j,k=0}^n|\partial_i\gamma^{jk}(t,x)|+\sum_{j=0}^n|\gamma^j(t,x)|\leq\kappa t^{-\mu}\tag{6.2.16}$$

成立，其中 c_n 仅依赖于维数，则有能量估计

$$E(T)^{1/2} \leq \left(3E(2B)^{1/2} + 4\int_{2B}^{T} \mathrm{d}s(\int_{H_T} f^2 \mathrm{d}x)^{1/2}\right) \exp\left(\int_{2B}^{T} C_n \kappa s^{-\mu} \mathrm{d}s\right). \tag{6.2.17}$$

事实上，用 $2\partial_t u$ 乘方程，作分部积分，且记

$$\tilde{E}(T;u) = E(T;u) + \int_{H_T} (2\sum_{j,k=0}^{2} \nu_j \gamma^{jk} \partial_k u \partial_0 u - \sum_{j,k=0}^{n} \gamma^{j,k} \partial_j u \partial_k u) \mathrm{d}x,$$

其中 $\nu_0 = 1, \nu_j = -x_j/t, j \neq 0$. 我们可得

$$E(T;u)/2 \leq \tilde{E}(T;u) \leq 3E(T;u)/2.$$

定理 6.2.2 *设 $u_0, u_1 \in C_0^\infty(\{x \in \mathbb{R}^n; |x| \leq B\})$, 对于 $F \in C^\infty$ 在原点 2 阶为零，考虑方程 (6.2.1), 对于 u/ε 满足 (6.2.10)。则对于 $t \geq 2B$, $n \geq 3$, 以及 ε 充分小，存在唯一的解 $u \in C^\infty$。*

证明 由局部存在性定理，问题存在一个 C^∞ 解，当 $\rho^2 = t^2 - |x|^2 \leq (2B)^2$ 时连同所有的导数均与 ε 同阶 $O(\varepsilon)$。设 s 是 $\geq n+4$ 的一个整数。令

$$M_s(t) = \sum_{|I| \leq s} E(t, \Gamma^I u)^{1/2}, \tag{6.2.18}$$

其中 E 是由 (6.2.12) 定义的能量，Γ^I 是阶数为 $|I|$ 的非齐次 Lorentz 群的李代数生成元的乘积。我们将证明存在一个常数 M 使得，如果我们能证明解对 $\rho < T$ 存在，则

$$M_s(t) \leq M\varepsilon,\ 2B \leq t < T. \tag{6.2.19}$$

由局部存在性理论，存在一个 $T' > T$ 使得解对 $\rho < T'$ 存在。这就得到整体存在性。为证 (6.2.19) 我们还是利用连续性方法，即只要说明如果 M 使得 (6.2.19) 成立，则用 $M/2$ 取代 M 也成立。为此，我们注意到

$$\sum_{|I| < s-n/2} \sup_{H_\tau} t^{n/2} |\Gamma^I u(t,x)| < CM_s(\tau), \tag{6.2.20}$$

且 (6.2.19) 意味着

$$\left(\sum_{|I| \leq s} \int_{H_\tau} |\Gamma^I u|^2 \mathrm{d}x\right)^{1/2} \leq M_s(\tau). \tag{6.2.21}$$

设 $|I| \leq s$, 将 Γ^I 作用到方程 (6.2.1), 记 $\gamma^{jk} = -\partial F/\partial u''_{jk}$ 我们得到

$$(\square + 1 + \sum \gamma^{jk} \partial_j \partial_k) \Gamma^I u + \sum_j \sum_J \gamma^j_{I,J} \partial_j \Gamma^J u = f_I, \tag{6.2.22}$$

其中 $\gamma_{I,J}^{j}=0$, 除非 $|I|=|J|=s$, 且

$$\sum_{j,k=0}^{n}|\gamma^{jk}(t,x)|+\sum_{i,j,k=0}^{n}|\partial_i\gamma^{jk}(t,x)|+\sum_{i=0}^{n}\sum_{|I|=|J|=s}|\gamma_{I,J}^{j}(t,x)|\leq CM\varepsilon t^{-n/2},$$

$$\left(\int_{H_t}|f_I|^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}\leq CM\varepsilon t^{-n/2}M_s(t),\ 2B\leq t<T. \tag{6.2.23}$$

由假设 $s-n/2>3+n/2$ 知对于 $|I|\leq 3$, (6.2.20) 成立。这样 γ^{jk} 的估计是显然的。如果 $|I|=0$ 我们定义 $\gamma_{I,J}^{j}=0$ 和 $f_I=F(u,u'u'')+\sum_{j,k=0}^{n}\gamma^{jk}\partial_j\partial_k u$。由 (6.2.20) 和 (6.2.21) 可得这时的 (6.2.23)。对于 $|I|\neq 0$, 用 Γ^I 与 $\Box$ 可换性只要讨论当 Γ^I 作用到 $F(u,u',u'')$ 所得到的项, 而这类同于我们以前的讨论。将能量不等式 (6.2.17) 用于当 $|I|\leq s$ 的方程 (6.2.22) 可得

$$M_s(t)\leq C\left(M_s(2B)+\int_{2B}^{t}M\varepsilon\tau^{-n/2}M_s(\tau)\mathrm{d}\tau\right)\exp\left(\int_{2B}^{t}C_nCM\varepsilon\tau^{-n/2}\mathrm{d}\tau\right),t<T.$$

当 ε 足够小, 不论 M 多大, 上式的指数因子 ≤ 2。用 Gronwall 不等式, 对于足够小的 ε, 我们有

$$M_s(t)\leq 2CM_s(2B)\exp\left(\int_{2B}^{t}2CM\varepsilon\tau^{-n/2}\mathrm{d}\tau\right)\leq 4CM_s(2B).$$

如果 $M>8CM_s(2B)/\varepsilon$, 这就证明了用 $M/2$ 取代 M 的 (6.2.19)。

对于 $n=2$, 除了要加条件 $\varepsilon\log T$ 小外其余同上述证明可得下面的定理。

定理 6.2.3 *除 $n=2$ 条件同定理 6.2.2, 则如果 ε 充分小, 存在一个常数 $c>0$ 使得解对 $T\leq e^{c/\varepsilon}$ 存在。*

对于 $n=1$, 这种方法不适用, 这是由于 (6.2.16) 只有当 $\mu=1/2$ 时成立。

6.2.3　Shatah 的法形式方法

由 Shatah [52] 给出的 $n\geq 3$ 时的一个类似的存在性定理并不要求初值具有紧支集, 而这一条件对前面 Klainermain 的证明是本质的。

定理 6.2.4 *设 $F\in C^\infty$ 满足 (6.2.1), 在原点 2 阶为零, 且空间维数 $n\geq 3$, 则具初值 (6.2.4) 的方程 (6.2.1) 对于 $u_0,u_1\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, ε 充分小, 有一个解 $u\in C^\infty(\mathbb{R}^{1+n})$。*

根据对 F 的假设, 我们可将其写成

$$F(u,u',u'')=\sum_{j,k=0}^{1}\mathcal{A}_{jk}(\partial',\partial'')[\partial_t^j u][\partial_t^k u]+R(u,u',u''), \tag{6.2.24}$$

其中 R 在原点 3 阶为零, $\mathcal{A}_{jk}$ 是关于作用在第一个变量 $\partial_t^j u$ 的算子 ∂' 的 $\leq 2-j$ 次多项式, 是关于作用在第二个变量 $\partial_t^k u$ 的算子 ∂'' 的 $\leq 2-k$ 次多项式, 这两种

情形都是关于空间变量 x 的。对于 $D'=-i\partial', D''=-i\partial''$ 和 $u,v\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, 形如 $\mathcal{B}(D',D'')[u][v]$ 的表达式关于 x 的 Fourier 变换是

$$\xi\longmapsto(2\pi)^{-n}\int\mathcal{B}(\xi-\eta,\eta)\hat{u}(\xi-\eta)\hat{v}(\eta)\mathrm{d}\eta.$$

以此作为定义，我们将寻找函数 $\mathcal{B}_{jk}$，不再是多项式，使得如果 u 是 (6.2.1) 的一个解且

$$U=\sum_{j,k=0}^{1}\mathcal{B}_{jk}(D',D'')[\partial_t^j u][\partial_t^k u],\ V=u-U, \tag{6.2.25}$$

则 $(\Box+1)V=F(u,u',u'')-(\Box+1)U$ 关于 u 是 3 阶的。由 Leibniz 公式

$$(1-\Delta)U=\sum_{j,k=0}^{1}((1+|D'|^2)+(2\langle D',D''\rangle-1)+(1+|D''|^2))\mathcal{B}_{jk}(D',D'')[\partial_t^j u][\partial_t^k u],$$

$$\partial_t^2U=\sum_{j,k=0}^{1}\mathcal{B}_{jk}(D',D'')([\partial_t^{j+2}u][\partial_t^k u]+2[\partial_t^{j+1}u][\partial_t^{k+1}u]+[\partial_t^j u][\partial_t^{k+2}u]).$$

利用方程可得

$$\begin{aligned}\partial_t^{j+2}u &= \partial_t^j(\Delta u-u+F(u,u',u''))=-(|D_x|^2+1)\partial_t^j u+\partial_t^j F(u,u',u''),\\ &\quad \text{如果} j=1,\ \partial_t^{j+1}u=\partial_t^2u=-(|D_x|^2+1)u+F(u,u',u''),\end{aligned}\tag{6.2.26}$$

类似地可用 k 取代 j。这说明 $(\Box+1)U$ 除了包含 F 和 F 的导数项外等于

$$\begin{aligned}&\mathcal{B}_{00}(D',D'')(2\langle D',D''\rangle-1)[u][u]+2\mathcal{B}_{00}(D',D'')[\partial_t u][\partial_t u]\\ &+\mathcal{B}_{01}(D',D'')(2\langle D',D''\rangle-1)[u][\partial_t u]-2\mathcal{B}_{01}(D',D'')(1+|D''|^2)[\partial_t u][u]\\ &+\mathcal{B}_{10}(D',D'')(2\langle D',D''\rangle-1)[\partial_t u][u]-2\mathcal{B}_{10}(D',D'')(1+|D'|^2)[u][\partial_t u]\\ &+\mathcal{B}_{11}(D',D'')(2\langle D',D''\rangle-1)[\partial_t u][\partial_t u]+2\mathcal{B}_{11}(D',D'')(1+|D'|^2)(1+|D''|^2)[u][u].\end{aligned}$$

如果

$$\begin{aligned}&\mathcal{B}_{00}(\xi,\eta)(2\langle\xi,\eta\rangle-1)+2\mathcal{B}_{11}(\xi,\eta)(1+|\xi|^2)(1+|\eta|^2)=\mathcal{A}_{00}(i\xi,i\eta),\\ &\mathcal{B}_{11}(\xi,\eta)(2\langle\xi,\eta\rangle-1)+2\mathcal{B}_{00}(\xi,\eta)=\mathcal{A}_{11}(i\xi,i\eta),\\ &\mathcal{B}_{01}(\xi,\eta)(2\langle\xi,\eta\rangle-1)-2\mathcal{B}_{10}(\xi,\eta)(1+|\xi|^2)=\mathcal{A}_{01}(i\xi,i\eta),\\ &\mathcal{B}_{10}(\xi,\eta)(2\langle\xi,\eta\rangle-1)-2\mathcal{B}_{01}(\xi,\eta)(1+|\eta|^2)=\mathcal{A}_{10}(i\xi,i\eta),\end{aligned}$$

则前面的表达式与 (6.2.24) 中的和式相等。其解由

$$\begin{aligned}&\mathcal{B}_{00}(\xi,\eta)=((1-2\langle\xi,\eta\rangle)\mathcal{A}_{00}(i\xi,i\eta)+2(1+|\xi|^2)(1+|\eta|^2)\mathcal{A}_{11}(i\xi,i\eta))\mathcal{K}(\xi,\eta),\\ &\mathcal{B}_{11}(\xi,\eta)=((1-2\langle\xi,\eta\rangle)\mathcal{A}_{11}(i\xi,i\eta)+2\mathcal{A}_{00}(i\xi,i\eta))\mathcal{K}(\xi,\eta),\\ &\mathcal{B}_{01}(\xi,\eta)=((1-2\langle\xi,\eta\rangle)\mathcal{A}_{01}(i\xi,i\eta)-2(1+|\xi|^2)\mathcal{A}_{10}(i\xi,i\eta))\mathcal{K}(\xi,\eta),\end{aligned}\tag{6.2.27}$$

$$\mathcal{B}_{10}(\xi,\eta) = ((1-2\langle\xi,\eta\rangle)\mathcal{A}_{10}(i\xi,i\eta) - 2(1+|\eta|^2)\mathcal{A}_{01}(i\xi,i\eta))\mathcal{K}(\xi,\eta),$$
$$\mathcal{K}(\xi,\eta) = (4(|\xi|^2|\eta|^2 - \langle\xi,\eta\rangle^2 + |\xi|^2 + |\eta|^2 + \langle\xi,\eta\rangle) + 3)^{-1}$$

给出。稍后我们将其精确化，且容易看到 $(\Box+1)V = F(u,u',u'') - (\Box+1)U$ 关于 u 是 3 阶的。我们将先研究双线性算子 $\mathcal{B}_{jk}$ 的连续性质。

设 $P(x,y)$ 是 $\mathbb{R}^{n+n}$ 中一个连续有界函数 $\mathcal{P}(\xi,\eta)$ 的 Fourier 逆变换，我们有 $P\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n+n})$，且如果 $u,v\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 则

$$\mathcal{P}(D',D'')[u][v](x) = \int\int P(x-y,x-z)u(y)v(z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z \tag{6.2.28}$$
$$= \int\int P(y,z)u(x-y)v(x-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z. \tag{6.2.29}$$

引理 6.2.2 如果 $P\in L^1(\mathbb{R}^{n+n})$，则对于 $1\le p,q,r\le\infty$ 和 $1/r=1/p+1/q$，我们有

$$\|\hat{P}(D',D'')[u][v]\|_{L^r} \le \|P\|_{L^1}\|u\|_{L^p}\|v\|_{L^q},\quad u,v\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

当 P 是原点的一个 δ 测度时，这是标准的 Hölder 不等式。由 Riesz 凸性定理只要证明当 $(1/p,1/q,1/r)$ 分别等于 $(1,0,1)$，$(0,1,1)$ 和 $(0,0,0)$ 的特殊情形。而这是 (6.2.28) 的一个直接的推论。

一般说来对于有界函数 $\mathcal{P}$ 要知道其 Fourier 逆变换在 L^1 中是困难的。但我们可以通过如下简单的充分条件来得到

引理 6.2.3 如果对于 $|\alpha|,|\beta|\le(n+2)/2$，$\partial_\xi^\alpha\partial_\eta^\beta\mathcal{P}(\xi,\eta)\in L^2(\mathbb{R}^{n+n})$，则 $\mathcal{P}$ 的 Fourier 逆变换在 $L^1(\mathbb{R}^{n+n})$ 中。

证明 设 k 是小于等于 $(n+2)/2$ 的最大整数，这样 $2k\ge n+1$。由 Parseval 公式 $P\in L^2$ 且

$$\sum_{|\alpha|,|\beta|\le k}\int\int|x^\alpha y^\beta P(x,y)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y<\infty.$$

由于 $\int\int(1+|x|^2)^{-k}(1+|y|^2)^{-k}\mathrm{d}x\mathrm{d}y<\infty$，则引理的结论来自于 Cauchy-Schwartz 不等式。

对于 $n=1$，由 (6.2.27) 定义的 $\mathcal{K}=(4(|\xi|^2+|\eta|^2+\langle\xi,\eta\rangle)+3)^{-1}$。由于 $4(|\xi|^2+|\eta|^2+\langle\xi,\eta\rangle)+3\ge 2(|\xi|^2+|\eta|^2)+3$，所以其 Fourier 逆变换 K 是 $\mathbb{R}^2$ 中一椭圆算子的基本解，在原点仅有对数奇性，由 Paley-Wiener 理论，它在无限远处有指数衰减，因而在 L^1 中。对于其他情形，我们有

引理 6.2.4 如果 $\mathcal{K}$ 是由 (6.2.27) 决定，$n\ge2$，则

$$\mathcal{P}_{a,b}(\xi,\eta) = (1+|\xi|^2)^{a/2}(1+|\eta|^2)^{b/2}\mathcal{K}(\xi,\eta) \tag{6.2.30}$$

在 $L^2(\mathbb{R}^{n+n})$ 中当且仅当 $2\max(a,b)+n<4$ 和 $2(a+b)+n<4$；如果 $n\ge5$ 第二个条件来自第一个。这些条件意味着对于所有的 α,β 都有 $\partial_\xi^\alpha\partial_\eta^\beta\mathcal{P}_{a,b}(\xi,\eta)\in L^2(\mathbb{R}^{n+n})$。

证明 如果 h 是 $\mathbb{R}^3$ 上的一个非负连续函数，则可以断言：

$$\iint_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} h(|\xi|^2,<\xi,\eta>,|\eta|^2)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta$$

$$= C_n \iiint\limits_{X,\ Y>0,\ |Z|<1} h(X^2, XYZ, Y^2)(XY)^{n-1}(1-Z^2)^{\frac{n-3}{2}}\mathrm{d}X\mathrm{d}Y\mathrm{d}Z$$

其中 $X=|\xi|$, $Y=|\eta|$, $Z=\cos\theta$, θ 为 ξ 与 η 之间的夹角。事实上, 由于在正交变换下积分不变, 对 ξ 的积分仅依赖于 $Y=|\eta|$, 故不妨取 $\eta=(Y,0,\cdots,0)$, 则上面的积分等于

$$C_n\int_0^\infty Y^{n-1}\mathrm{d}Y\iint\limits_{r>0} h(r^2+\xi_1^2, \xi_1 Y, Y^2)r^{\frac{n-2}{2}}\mathrm{d}r\mathrm{d}\xi_1.$$

令 $X=\sqrt{r^2+\xi_1^2}$, $Z=\frac{\xi_1}{\sqrt{r^2+\xi_1^2}}$, 容易计算出 $\xi_1=XZ$, $r^2=X^2(1-Z^2)$ 并且

$$\mathrm{d}r\mathrm{d}\xi_1=\frac{X}{\sqrt{1-Z^2}}\mathrm{d}X\mathrm{d}Z.$$

代入上式即得断言, 因此问题可归结为证明

$$\iiint\limits_{X,\ Y>0,\ |Z|<1}\frac{(1+X^2)^a(1+Y^2)^b(XY)^{n-1}(1-Z^2)^{\frac{n-3}{2}}}{(X^2Y^2(1-Z^2)+X^2+Y^2+1)^2}\mathrm{d}X\mathrm{d}Y\mathrm{d}Z<\infty.$$

由于 $n\geq 2$, 故当 $\max(X,Y)<1$ 时积分收敛, 故只须估计 $X<Y$ 且 $Y>1$, 与 $Y<X$ 且 $X>1$ 的情形。在第一种情形, 可用 Y^2 代替 $1+Y^2$ 并去掉分母中的 $1+X^2$ 得到以下的等价积分

$$\iiint\limits_{|Z|<1<Y,\ 0<X<Y}(1+X^2)^a X^{n-1}Y^{2b+n-5}(1-Z^2)^{\frac{n-3}{2}}(X^2(1-Z^2)+1)^{-2}\mathrm{d}X\mathrm{d}Y\mathrm{d}Z$$

除非 $2b+n<4$, 否则关于 Y 的积分发散。交换 X,Y 则同样得到积分收敛的必要条件 $2a+n<4$。当这些条件都满足, $X<1$ 时积分显然收敛。剩余部分 $1<X<Y$ 的积分收敛当且仅当

$$\iint\limits_{|Z|<1,\ X>1}X^{2a+2b+2n-6}(1-Z^2)^{\frac{n-3}{2}}(X^2(1-Z^2)+1)^{-2}\mathrm{d}X\mathrm{d}Z<\infty$$

由已得的必要条件, $2a+2b+2n<8$。故当 $|Z|<\frac{1}{2}$ 时积分收敛。当 $\frac{1}{2}<|Z|<1$ 时, 可取 $1-Z^2$ 作为新的变量, 故剩下要做的是确定什么条件下有

$$\iint\limits_{X>1,\ 0<t<1}X^{2a+2b+2n-6}t^{\frac{n-3}{2}}(X^2t+1)^{-2}\mathrm{d}X\mathrm{d}t<\infty,$$

这里

$$\int_0^1 t^{\frac{n-3}{2}}(X^2t+1)^{-2}\mathrm{d}t=X^{1-n}\int_0^{X^2}t^{\frac{n-3}{2}}(t+1)^{-2}\mathrm{d}t.$$

考察积分

$$\int_0^{X^2} t^{\frac{n-3}{2}}(t+1)^{-2}\mathrm{d}t.$$

如果 $n \le 4$, 当 $X \to \infty$ 时, 积分有界。如果 $n=5$, 则为 $O(\log X)$。如果 $n>5$, 为 $O(X^{n-5})$。当 $n \ge 5$ 时, 由已给的必要条件可以保证积分收敛, 但当 $n \le 4$ 时, X 的指数为 $2a+2b+2n-5$, 因此还需要条件 $2(a+b)+n<4$, 引理的第一部分证明完成。

令 $\mathcal{I}(\xi,\eta)=\frac{1}{\mathcal{K}(\xi,\eta)}$, 我们有

$$\mathcal{I}(\xi,\eta) \ge 2(|\xi|^2+|\eta|^2)+3 \ge 4\sqrt{|\xi|^2+|\eta|^2},$$
$$\left|\frac{\partial(|\xi|^2|\eta|^2-\langle\xi,\eta\rangle^2)}{\partial(\xi,\eta)}\right|^2 = 2(|\xi|^2+|\eta|^2)(|\xi|^2|\eta|^2-\langle\xi,\eta\rangle^2) \le \frac{\mathcal{I}(\xi,\eta)^2}{4}.$$

第一个不等式根据算术平均值与几何平均值之间的关系可得。第二个等式与不等式可根据正交不变性, 只考虑当 $j>2$ 时 $\xi_j=\eta_j=0$ 的情形。由于

$$|\xi|^2|\eta|^2-\langle\xi,\eta\rangle^2=(\xi_1\eta_2-\xi_2\eta_1)^2+O((|\xi|^2+|\eta|^2)\sum_{j>2}(|\xi_j|^2+|\eta_j|^2)),$$

这是显然的。因此可以得到 $\left|\frac{\partial\mathcal{I}(\xi,\eta)}{\partial(\xi,\eta)}\right| \le 5\mathcal{I}(\xi,\eta)$, 由此可推得对 $\forall\alpha,\beta$ 有

$$\left|\partial_\xi^\alpha\partial_\eta^\beta\mathcal{I}(\xi,\eta)\right| \le C_{\alpha\beta}\mathcal{I}(\xi,\eta).$$

因为当 $|\alpha|+|\beta| \ge 2$ 时, 这是显然的。由于 $\mathcal{K}(\xi,\eta)\mathcal{I}(\xi,\eta)=1$, 逐次微分这一方程可得

$$\left|\partial_\xi^\alpha\partial_\eta^\beta\mathcal{K}(\xi,\eta)\right| \le C'_{\alpha\beta}\mathcal{K}(\xi,\eta).$$

因此

$$\left|\partial_\xi^\alpha\partial_\eta^\beta\mathcal{P}_{a,b}(\xi,\eta)\right| \le C''_{\alpha\beta a,b}(\xi,\eta).$$

引理得证。

引理 6.2.5 如果 $1 \le p,q,r \le \infty$ 和 $1/r=1/p+1/q$, 则

$$\|\mathcal{K}(D',D'')[u][v]\|_{L^r} \le C_n\sum_{|\alpha|\le\nu}\|\partial^\alpha u\|_{L^p}\sum_{|\beta|\le\nu}\|\partial^\beta v\|_{L^q},\ u,v\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \tag{6.2.31}$$

当 $n>3$ 时, 其中的 ν 是 $>(n-4)/2$ 的最小整数; 当 $n=3$ 时, $\nu=1$; 当 $n=1,2$ 时 $\nu=0$。

证明 $n=1$ 时由 引理 6.2.4 前面的说明知 $\mathcal{K}$ 的逆变换在 L^1 中, 这样由在这种情形的 引理 6.2.2 即得 (6.2.31)。$n \ge 2$ 时我们应用 引理 6.2.4 于 $a=b=-\nu$, 我们有

$$\begin{aligned}\mathcal{K}(\xi,\eta) &= (1+|\xi|^2)^\nu(1+|\eta|^2)^\nu(1+|\xi|^2)^{-\nu}(1+|\eta|^2)^{-\nu}\mathcal{K}(\xi,\eta)\\ &= \sum_{|\alpha|\le\nu,|\beta|\le\nu}c_{\alpha\beta}\xi^\alpha\eta^\beta\mathcal{K}_{\alpha\beta}(\xi,\eta),\end{aligned}$$

其中 $c_{\alpha\beta}$ 是常数且

$$\mathcal{K}_{\alpha\beta}(\xi,\eta)=\xi^{\alpha}(1+|\xi|^2)^{-\nu/2}\eta^{\beta}(1+|\eta|^2)^{-\nu/2}\mathcal{P}_{-\nu,-\nu}(\xi,\eta).$$

由 引理 6.2.4 得 $\mathcal{K}_{\alpha\beta}$ 连同其所有导数均在 L^2 中。因此，由 引理 6.2.3 知其 Fourier 逆变换在 L^1 中，由 引理 6.2.2, 不等式 (6.2.31) 成立，这是由于

$$\mathcal{K}(D',D'')[u][v]=\sum_{|\alpha|\le\nu,|\beta|\le\nu}c_{\alpha\beta}\mathcal{K}_{\alpha\beta}(D',D'')[D'^{\alpha}u][D''^{\beta}v].$$

因为 $\mathcal{K}$ 是实值且为偶函数，所以其 Fourier 逆变换是实值。不难知道这意味着当 u,v 是实值时 $\mathcal{B}_{jk}(D',D'')[u][v]$ 是实值的。下面给出 定理 6.2.4 的证明，它是基于 定理 6.2.1 的证明之基础之上的。

定理 6.2.4 **的证明** 设 s 是不小于 $3n+11$ 的整数。只要证明存在与 ε 和 T 无关，仅依赖于 u_0,u_1 的数 M，使得如果 u 是在 $0\le t\le T$ 上满足 (6.2.5), (6.2.6) 的解，则对于 ε 足够小，用 $M/2$ 取代 (6.2.5) 和 (6.2.6) 中的 M 不等式仍成立。如前我们可得

$$\sum_{|\alpha|\le s+1}\|\partial^{\alpha}u(t,\cdot)\|_{L^2}\le C\varepsilon+C'(\varepsilon M)^2,\ 0\le t\le T;$$

仅有的不同是 $(\varepsilon M)^3$ 现在已由 $(\varepsilon M)^2$ 取代。然而，如果 $M>2C$, 对于 ε 充分小，用 $M/2$ 取代 M(6.2.5) 仍成立。为证 (6.2.6) 用 $M/2$ 取代 M 成立，由 (6.2.25) 将 u 写成 $u=U+V$。为估计当 $|\gamma|\le\mu=s/2+2$ 时的 $\partial^{\gamma}U$, 注意到由 Leibniz 公式对双线性映照 $\mathcal{B}_{jk}(D',D'')$ 成立，我们有

$$\partial^{\gamma}U=\sum_{\gamma'+\gamma''=\gamma}\frac{\gamma!}{\gamma'!\gamma''!}\sum_{j,k=0}^{1}\mathcal{B}_{jk}(D',D'')[\partial^{\gamma'}\partial_t^{j}u][\partial^{\gamma''}\partial_t^{k}u].$$

从 $p=q=r=\infty$ 时的 (6.2.31) 得

$$\sum_{|\gamma|\le\mu}|\partial^{\gamma}U(t,\cdot)|\le C\sum_{\substack{|\gamma'+\gamma''|\le\mu\\|\alpha|\le\nu+3,|\beta|\le\nu+3}}\sup|\partial^{\gamma'+\alpha}u(t,\cdot)|\sup|\partial^{\gamma''+\beta}u(t,\cdot)|. \tag{6.2.32}$$

由于 $2\nu+6\le n+5\le\mu$ 我们可以设 $|\gamma'|\le|\gamma''|$, 这样我们就有 $|\gamma'|\le\mu/2$ 和 $|\gamma'|+|\alpha|\le\mu/2+\nu+3\le\mu$。(6.2.32) 右边和式中的第一个因子能用 (6.2.6) 估计。由 Sobolev 不等式和 (6.2.5), 第二个因子 $\le CM\varepsilon$ 对于 $|\gamma''|+|\beta|+(n+2)/2\le s/2+2+\nu+3+(n+2)/2\le s+1$ 成立。这样

$$|\partial^{\gamma}U(t,\cdot)|\le C(M\varepsilon)^2(1+t)^{-n/2},\ 0\le t\le T. \tag{6.2.33}$$

剩下来估计 (6.2.25) 中的另一项 V, 这本质上与 定理 6.2.1 的证明一样。用 (6.2.24) 的记号 R, 对于除二阶项外的非线性扰动

$$(\Box+1)\partial^{\alpha}V=\partial^{\alpha}(R(u,u',u'')-\sum_{1}^{4}S_j(u,u',u''))=F_{\alpha}, \tag{6.2.34}$$

其中

$$
\begin{aligned}
S_1(u,u',u'') &= \sum_{j,k=0}^{1}(\mathcal{B}_{jk}(D',D'')[\partial_t^j F(u,u',u'')][\partial_t^k u]) \\
&\quad +\mathcal{B}_{jk}(D',D'')[\partial_t^j u][\partial_t^k F(u,u',u'')], \\
S_2(u,u',u'') &= 2\mathcal{B}_{10}(D',D'')[F(u,u',u'')][\partial_t u]+2\mathcal{B}_{01}(D',D'')[\partial_t u][F(u,u',u'')], \\
S_3(u,u',u'') &= 2\mathcal{B}_{11}(D',D'')[F(u,u',u'')][F(u,u',u'')], \\
S_4(u,u',u'') &= 2\mathcal{B}_{11}(D',D'')[\Delta u-u][F(u,u',u'')] \\
&\quad +2\mathcal{B}_{11}(D',D'')[F(u,u',u'')][\Delta u-u].
\end{aligned}
$$

$\partial^\alpha R(u,u',u'')$ 的 L^1 范数估计已由 定理 6.2.1 的证明中给出。由 $r=1,p=q=2$ 时的 引理 6.2.5, 我们有

$$
\|\partial^\gamma S_1(t,\cdot)\|_{L^1}\le C\sum_{\substack{|\gamma'+\gamma''|=\gamma\\ |\alpha|\le\nu+3,|\beta|\le\nu+3}}\|\partial^{\gamma'+\alpha}F(u,u',u'')(t,\cdot)\|_{L^2}\|\partial^{\gamma''+\beta}u(t,\cdot)\|_{L^2}.
$$

如果 $|\gamma|\le\mu+n$, 则由于 $2\nu\le n-1$ 和 $s\ge 3n+11$ 我们有 $|\gamma|+|\alpha|+2\le\mu+n+5+\nu\le s+1$。因此,

$$
\|\partial^{\gamma'+\alpha}F(u,u',u'')(t,\cdot)\|_{L^2}\le C(M\varepsilon)^2(1+t)^{-n/2},\ \|\partial^{\gamma''+\beta}u(t,\cdot)\|_{L^2}\le CM\varepsilon,
$$

这就给出了 $\|\partial^\gamma S_1(t,\cdot)\|_{L^1}\le C(M\varepsilon)^3(1+t)^{-n/2}$。对 $S_i,i=2,3,4$ 可作同样的估计, 因而就有

$$
\int|F_\gamma(t,x)|dx\le C(M\varepsilon)^3(1+t)^{-n/2},\ 0\le t\le T,\ |\gamma|\le\mu+n.
$$

由 定理 3.5.3 如同 定理 6.2.1 的证明可得

$$
\sum_{|\gamma|\le s/2+2}\sup_x|\partial^\gamma V(t,x)|\le C(\varepsilon+(M\varepsilon)^3)(1+t)^{-n/2},\ 0\le t\le T. \tag{6.2.35}
$$

如果 $M>2C$, 若 ε 足够小, 则从 (6.2.33) 和 (6.2.35) 得 (6.2.6) 当 $M/2$ 取代 M 时成立。

注 6.2.1 这个方法对 $n=2$ 情形不能用, 这是由于在 (6.2.7) 中我们仅能得到 $|\gamma^{jk}(t,x)|\le CM\varepsilon(1+t)^{-1}$, 这关于 t 是不可积的。如果 F 与 u'' 无关, 或至少其 2 次项仅依赖于 u 和 u'。这样的困难就不存在, 因为这时它不出现。但还有一个原因来自于

$$
(2+t)\int_0^t(1+t-s)^{-1}(1+s)^{-1}\mathrm{d}s=2\log(1+t)
$$

无界。Ozawa, Tsutaya 和 Tsutsumi [49]等通过组合 Klainerman 和 Shatah 的方法证明了相应的整体存在性结论, 对于半线性情形 $F(u,u')$, Simon, Taflin 证明了类似的结果。当 $n=1$ 时 Moriyama, Tonegawa 和 Tsutsumi [48]用类似的方法对半线性

情形 $F(u,u')$ 给出了生命区间的估计为 $\geq A\exp(B\varepsilon^{-2})$。Yordanov [67] 给出了一个例子 $u''_{tt}-u''_{xx}+u=u'^2_t u'_x$ 说明当 $n=1$ 时如果初值 $\varepsilon u_0,\varepsilon u_1\in C_0^\infty([-R,R]),R>0$ 且 $\sigma=\int_{\mathbb{R}}u'_0(x)u_1(x)\mathrm{d}x>0$, 这样的生命区间长度 $\leq R(\exp(2/\sigma\varepsilon^2)-1)$。Keel 和 Tao [29]也证明了这样的生命区间是最优的。

以上的存在性定理是假设初值是紧支集或在无穷远是快速下降的 C^∞ 函数。当初值的衰减只是等同于 H^s 函数的情形, Delort [9] 证明了当 $n=1$ 时其生命区间 $\geq c\varepsilon^{-4}|\log\varepsilon|^{-6}$; 对于高维情形, 如果方程右端的非线性函数是 $[(\partial_t u)^2-(\partial_x u)^2]G(u),G(u)$ 是多项式, 则 Delort 和方道元 [10] 证明了其生命区间 $\geq c\exp(c\varepsilon^{-\mu})$, 当 $n\geq 3$ 时 $\mu=1$, 当 $n=2$ 时 $\mu=2/3$。

对于 Klein-Gordon 方程组的整体存在性的研究可参考 Delort, 方道元和薛儒英 [14,65,66] 以及 Sunagawa [60–62] 等人的工作。

§6.3　具小初值的半线性波动方程

我们已经看到 $\mathbb{R}^{1+3}_+$ 中的方程 $\Box=Cu^3$, 如果初值在 C_0^∞ 中且充分小, 则存在整体解。我们也注意到, 一般 $\Box u=u^2$ 的解一定在有限时间内破裂。本节的目的是确定形如 $\Box u=|u|^\kappa$ 的方程何时对任意的小初值有整体解, 取材于 Sogge 的讲义。先介绍 F. John 等在 $\mathbb{R}^3_+$ 中当 $\kappa>1+\sqrt{2}$ 时, 具 C_0^∞ 小初值的整体解。然后, 将在下面的两节关心对初值的正则性要求问题。我们将发现在非径向情形, 正则性的假设依赖于 κ 大于或小于 “共形” 指数 $\kappa=3$。在球面对称情形, 解的性态改变于 John 的指数 $\kappa=1+\sqrt{2}$。这两个低正则性的结果将用解的混合范数估计或 Strichartz 型不等式得到。这些不等式的某些对我们研究 $\mathbb{R}^{1+3}_+$ 中的所谓 “临界波动方程 $\Box u+u^5=0$” 是重要的。“临界” 这个术语在某种意义上是有些滥用的, 由于在上面的讨论中对 $(1+3)$ 维的半线性波动方程来说有三个临界指数: $\kappa=1+\sqrt{2},\kappa=3$ 和 $\kappa=5$。

我们将研究形如

$$\begin{cases}\Box u(t,x)=F_\kappa(u)\\ u(0,x)=\varepsilon f(x),\ \partial_t u(0,x)=\varepsilon g(x)\end{cases}\tag{6.3.1}$$

的半线性波动方程的解, 其中我们设 f 和 g 是具有紧支集的给定函数。对于 $\kappa\geq 2$, 我们将设 $F_\kappa\in C^2,F_\kappa(0)=F'_\kappa(0)=0$, 以及当 $|u|\leq 1$ 时, 有

$$|F''_\kappa(u)|\leq C|u|^{\kappa-2};\tag{6.3.2}$$

对于 $1<\kappa<2$, 我们减弱这些假设到 $F_\kappa\in C^1,F_\kappa(0)=0$, 且当 $|u|\leq 1$ 时, 有

$$|F'_\kappa(u)|\leq C|u|^{\kappa-1}.\tag{6.3.3}$$

这一节的主要结果如下:

定理 6.3.1 设 $f \in C^3(\mathbb{R}^3), g \in C^2(\mathbb{R}^3)$ 有紧支集，则对于 $\kappa > 1+\sqrt{2}$，方程 (6.3.1) 对足够小的 ε 存在唯一的整体经典解。另一方面，如果我们令

$$T_\varepsilon = \begin{cases} \exp(c\varepsilon^{-\kappa(\kappa-1)}), & \kappa = 1+\sqrt{2}, \\ C\varepsilon^{\frac{\kappa(\kappa-1)}{\kappa^2-2\kappa-1}}, & 1 < \kappa < 1+\sqrt{2}, \end{cases} \tag{6.3.4}$$

则，如果 $C, \varepsilon > 0$ 充分小，对于 $2 \le \kappa \le 1+\sqrt{2}$ 存在唯一的解 $u \in C^2([0, T_\varepsilon) \times \mathbb{R}^3)$；对于 $1 < \kappa < 2$，如果 $f \in C^2(\mathbb{R}^3)$ 和 $g \in C^1(\mathbb{R}^3)$ 具有紧支集，则存在唯一的（弱）解 $u \in C^1([0, T_\varepsilon)) \times \mathbb{R}^3$。此外，如果 $F_\kappa(u) = |u|^\kappa$，则当 $1 < \kappa \le 1+\sqrt{2}$ 时，即使 $\varepsilon > 0$ 小，一般 (6.3.1) 没有整体解，且上面给出的生命区间的估计是最佳的。

对 $\kappa > 1+\sqrt{2}$ 和 $\kappa = 2$ 的正面结果是由 John 给出的，他也说明了如果 $\kappa < 1+\sqrt{2}, F_\kappa(u) = |u|^\kappa$，则由上面给出的生命区间是最佳的。Lindblad 将这个结果延拓到了 $1 < \kappa < 1+\sqrt{2}$，随后周忆处理了 $\kappa = 1+\sqrt{2}$ 的情形。在后来的工作中也被说明对于 $1 < \kappa < 2$ 和 $\kappa = 1+\sqrt{2}$ 上面的生命区间的估计是最佳的。

对 $\kappa > 1+\sqrt{2}$，在 John 的存在性结果的证明中使用了一个赋予范数

$$\sup_{t>0}(1+t)\|(1+|t-r|)^{\kappa-2}\sup_{w\in\mathbb{S}^2}|u(t, rw)|\|_{L_r^\infty} \tag{6.3.5}$$

的空间中的一个迭代的讨论。

Lindblad 和周忆延拓 John 的结果时所用的是不同的方法。然而，所有这些讨论都用了 $(1+3)$ 维中 $\Box$ 算子的前向基本解的正性。

回到证明之前，我们先说明一下在其他维数的情形。记 κ_n 是方程

$$(n-1)\kappa^2 - (n+1)\kappa - 2 = 0 \tag{6.3.6}$$

的正根，即

$$\kappa_n = \frac{n+1+\sqrt{(n+1)^2+8(n-1)}}{2(n-1)}.$$

Strauss 猜测：如果 $\kappa > \kappa_n$，对 $(1+n)$ 维中具紧支集的小初值的半线性方程存在整体解，当 $n=2$ 时这个整体存在性结果是由 Glassey 建立的，用的是类似于 John 在 $(1+3)$ 维情形的讨论。当 $n=4$ 时，$\kappa_4 = 2$，周忆证明了这个猜测，所用的方法是基于用 Klainernan-Sobolev 不等式证明高维拟线性整体解存在的思想。在高维情形，仅有部分结果。Sogge 和 Lindblad 在球面对称的假设下，说明了这个猜测对任何维数均成立，用的是 定理 3.6.9。在这个工作中，也说明了在没有球对称的假设下，如果 $n \le 6$，猜测也成立。这个结果说明：在高维中缺乏比较定理时可以用球面对称性条件来作部分取代，我们知道随着维数 n 的增加 $\Box$ 的基本解的奇性也随之增加，这给猜测的证明带来困难。

由于在 (6.3.1) 中我们并不假设球面对称，我们将需要 u 的径向优函数：

$$u^*(t, |x|) = \sup_{w\in\mathbb{S}^2}|u(t, |x|w)|.$$

用 定理 3.6.8 和波动方程的比较定理，我们有下面对 u^* 有用的估计。

引理 6.3.1 设 $F \in C(\mathbb{R}_+^{1+3})$ 满足当 $|x| \geq t+1$ 时, $F(t,x)=0$, 则如果 w 是在 $t=0$ 具零 Cauchy 初值的 $\square w = F$ 的解, 对于 $T > 10, 1 \leq q < 3$, 我们有

$$\|w^*(T,|x|)\|_{L_x^q(\mathbb{R}^3)} \leq C(1+T)^{\frac{2-q}{q}} \|F^*\|_{L_t^q L_x^1(S_T)} + C_q T^{\frac{3-q}{q}} \|F^*\|_{L_t^\infty L_x^1([T/4,T]\times\mathbb{R}^3)}. \tag{6.3.7}$$

对于这样的 q, 也有

$$\|w^*(T,|x|)\|_{L_x^q(\mathbb{R}^3)} \leq C_q T^{\frac{3-q}{q}} \|F^*\|_{L_t^\infty L_x^1(S_T)}. \tag{6.3.8}$$

为简单，在我们所叙述的结果中均是在 $|x| > t+1$ 时 $F(t,x)=0$ 的假设下取得的。然而, 在应用时，我们并不假设 (6.3.1) 中的初值的支集在单位球中，如果对 $|x| > R$, $g(x) = f(x) = 0$, 我们要以当 $|x| > t+R$ 时, $F(t,x)=0$ 来取代这个假设, 但通过标尺度平衡的讨论，(6.3.7) 和 (6.3.8) 可拓延到这种情形，但其不等式的常数依赖于 R 和 q, 这是由于 $\square(w(Rt,Rx)) = R^2F(Rt,Rx)$。这样，应用 (6.3.7) 和 (6.3.8) 到这个方程就得对 $w(t,x)$ 的估计。

引理 6.3.1 的证明 如果 $\tilde{w}$ 是具零初值的 $\square\tilde{w} = F^*$ 的解, 则 $|w| \leq \tilde{w}$, 这是由于对 $\square$ 前向基本解的正性。由于 $\tilde{w}$ 是球面对称的，这也就有 $w^*(T,|x|) \leq \tilde{w}(T,|x|)$。用 (3.6.68) 和这个估计，我们有

$$\|w^*(T,|x|)\|_{L^q(|x|>\frac{T+1}{4})} \leq C(1+T)^{\frac{2-q}{q}} \|F^*\|_{L_t^q L_x^1(S_T)}.$$

为说明这个估计当 $|x| < (T+1)/4$ 时也成立, 我们回顾

$$|x|\tilde{w}(T,x) = 1/2\int_0^T \int_{|T-r-s|}^{T+r-s} F^*(s,\rho)\rho \mathrm{d}\rho \mathrm{d}s,\ r=|x|.$$

如果 $r=|x|<(T+1)/4, s<T/4$, 若 $T>10$, 则积分为零, 这是因为这时 $|T-r-s| \geq s+1$, 由 F 的支集的性质知对于 $\rho \geq s+1, F^*(s,\rho)=0$。因此, 由 (3.6.69), 我们看到, 如果 $T>10$,

$$\|w^*(T,|x|)\|_{L^q(|x|\leq\frac{T+1}{4})} \leq \|\tilde{w}(T,|x|)\|_{L^q(|x|\leq\frac{T+1}{4})} \leq CT^{\frac{3-q}{q}} \|F^*\|_{L_t^\infty L_x^1([T/4,T]\times\mathbb{R}^3)}.$$

这和上一个不等式意味着 (6.3.7)。

为证 (6.3.8), 首先注意到应用 (3.6.69) 可得到

$$\|w^*(T,|x|)\|_{L^q(|x|<T)} \leq \|\tilde{w}(T,x)\|_{L^q(|x|<T)} \leq CT^{\frac{3-q}{q}} \|F^*\|_{L_t^\infty L_x^1(S_T)}.$$

由 Huygen's 的原理和 F 的支集性质, 对于 $|x| > T+1$, 有 $w(T,x)$ 为 0。为完成证明，我们仅需说明上面的不等式在 $T < |x| < T+1$ 中也成立。对这一点，我们用 (3.6.68) 得到

$$\begin{aligned}\|w^*(T,|x|)\|_{L^q(T<|x|<T+1)} &\leq CT^{\frac{2-q}{q}} \|\,|x|^{\frac{q-2}{q}} w^*(T,|x|)\|_{L^q(T<|x|<T+1)} \\ &\leq CT^{\frac{2-q}{q}} \|F^*\|_{L_t^q L_x^1(S_T)}\end{aligned}$$

$$\leq \quad CT^{\frac{3-q}{q}}\|F^*\|_{L_t^\infty L_x^1(S_T)}.$$

定理 6.3.1 存在性部分的证明 对于 $\kappa \geq 2$, 我们已知 $(f,g) \in C_0^3(\mathbb{R}^3) \times C_0^2(\mathbb{R}^3)$; 而对于 $1 < \kappa < 2$, $(f,g) \in C_0^2(\mathbb{R}^3) \times C_0^1(\mathbb{R}^3)$。应用 $\mathbb{R}^{1+3}$ 中半线性方程的局部存在性定理得, 对任给 $\varepsilon > 0$, 存在一个 $T_* > 0$ 使得如果 $\kappa \geq 2$, (6.3.1) 有解 $u \in C^2([0,T_*) \times \mathbb{R}^3)$; 如果 $1 < \kappa < 2$ 有解 $u \in C^1([0,T_*) \times \mathbb{R}^3)$。如果我们要得到对于 $\kappa > 1+\sqrt{2}, T_\varepsilon = +\infty$, 而对于 $1 < \kappa \leq 1+\sqrt{2}$, T_ε 由 (6.3.4) 给出, 我们就得说明: 如果 $\varepsilon > 0$ 足够小, 就能取 $T_* = T_\varepsilon$。再次应用局部存在定理, 我们看到: 只要说明如果 $\varepsilon > 0$ 足够小, 则能从

$$T_* < T_\varepsilon \text{和} u \in C^{[\kappa]}([0,T_*) \times \mathbb{R}^3) \ \text{推得} \ u \in L^\infty([0,T_*) \times \mathbb{R}^3), \tag{6.3.9}$$

其中 $[\kappa]$ 记 $\leq \kappa$ 的最大整数, $1 < \kappa < 3$。

对于 $2 \leq \kappa < 3$ 和 $1 < \kappa < 2$ 的讨论稍有不同, 我们先讨论前者。

情形 1: $2 \leq \kappa < 3$。

考虑 (6.3.1) 的线性形式:

$$\begin{cases} \Box u_0 = 0, \\ u_0(0,x) = \varepsilon f(x), \partial_t u_0(0,x) = \varepsilon g(x). \end{cases} \tag{6.3.10}$$

设 $f \in C^3(\mathbb{R}^3), g \in C^2(\mathbb{R}^3)$ 有紧支集, 且当 $|x| > R$ 时它们为 0。由 $(1+3)$ 维中的强 Huygen's 原理,

$$\text{如果}|x| \notin [t-R, t+R],\ u_0(t,x) = 0. \tag{6.3.11}$$

由线性方程的衰减估计, 如果 $|\alpha| \leq 2, D^\alpha u_0(t,x) = O(\varepsilon/(t+1))$。因此, 必存在常数 A, 依赖于 f 和 g, 使得

$$(1+t)^{\frac{\kappa-2}{\kappa}} \sum_{|\alpha|\leq 2} \|(D^\alpha u_0)^*(t,|x|)\|_{L^\kappa(\mathbb{R}^3)} \leq \frac{A\varepsilon}{4}, \tag{6.3.12}$$

其中 $D = \partial/\partial x$。

基于此, 我们断言, 如果 $\varepsilon > 0$ 足够小, T_* 如同 (6.3.9), 则当 $T < T_*$ 时, 如果 $0 \leq t \leq T$,

$$(1+t)^{\frac{\kappa-2}{\kappa}} \sum_{|\alpha|\leq 2} \|(D^\alpha u)^*(t,|x|)\|_{L^\kappa(\mathbb{R}^3)} \leq \frac{A\varepsilon}{2}. \tag{6.3.13}$$

由 Sobolev 定理, 对 $2 \leq \kappa < 3$, 这就得到 (6.3.9)。

对于断言, 我们可用连续性方法证明。由于有 (6.3.12) 成立, (6.3.13) 对足够小的时间必须成立。我们只要说明形如:

$$(1+t)^{\frac{\kappa-2}{\kappa}} \sum_{|\alpha|\leq 2} \|(D^\alpha u)^*(t,|x|)\|_{L^\kappa(\mathbb{R}^3)} \leq A\varepsilon,\ 0 \leq t \leq T, \tag{6.3.14}$$

的界实际上意味着更强的估计 (6.3.13) 成立。为此，注意到由 Sobolev 定理, (6.3.14) 意味着存在某个固定的常数 C, 使得在 $0 \le t \le T$ 上满足 $|u(t,x)| \le CA\varepsilon$。我们可设 $\varepsilon < 1/(CA)$, 这样我们就能用 (6.3.2) 导出在 S_T 上满足

$$|F_\kappa^{(j)}(u)| \le C|u|^{\kappa-j}, j \le 2.$$

再注意到 u 能写成 $u = u_0 + w$, 其中 u_0 是 (6.3.10) 的解, w 是在 $t=0$ 时满足具零 Cauchy 初值的方程 $\Box w = F_\kappa(u)$ 的解。因此, 如果我们记 (6.3.14) 的左边为 $A(t)$, 应用引理 6.3.1 得

$$\begin{aligned} A(t) \quad \le \quad & \frac{A\varepsilon}{4} + C\sum_{|\alpha|\le 2}\|(D^\alpha F_\kappa(u))^*\|_{L_s^\kappa L_x^1(S_t)} \\ & + C(1+t)^{\frac{\kappa-2}{\kappa}} t^{\frac{3-\kappa}{\kappa}} \sum_{|\alpha|\le 2}\|(D^\alpha F_\kappa(u))^*\|_{L_s^\kappa L_x^1([t/4,t]\times\mathbb{R}^3)}. \quad (6.3.15) \end{aligned}$$

为简单, 这里我们假设了 $t > 10$, 目的是为了能用 (6.3.7); 然而, 如果 $0 < t < 10$ 我们能用 (6.3.8) 作类似的讨论。

为了估计 (6.3.15) 的右边, 注意到 (6.3.2) 和莱布尼兹法则给出

$$\sum_{|\alpha|\le 2}|D^\alpha F_\kappa(u(t,x))| \le C\sum_{|\alpha|\le 2}|(D^\alpha u(t,x)|^\kappa.$$

由于同样的不等式对径向优函数也成立, (6.3.15) 给出了

$$\begin{aligned} A(t) \quad \le \quad & \frac{A\varepsilon}{4} + C\sum_{|\alpha|\le 2}\left(\|(D^\alpha u)^*\|^\kappa_{L_s^{\kappa^2} L_x^\kappa(S_t)} + (1+t)^{\frac{1}{\kappa}}\|(D^\alpha u)^*\|^\kappa_{L_s^\infty L_x^\kappa([t/4,t]\times\mathbb{R}^3)}\right) \\ \le \quad & \frac{A\varepsilon}{4} + C\sup_{s\le T}A^\kappa(s)\left[\left(\int_0^T (1+s)^{\kappa^2\frac{2-\kappa}{\kappa}}\mathrm{d}s\right)^{1/\kappa} + (1+t)^{\frac{1}{\kappa}-\kappa\frac{\kappa-2}{\kappa}}\right] \\ \le \quad & \frac{A\varepsilon}{4} + C\sup_{s\le T}A^\kappa(s)\left[\left(\int_0^T (1+s)^{\kappa(2-\kappa)}\mathrm{d}s\right)^{1/\kappa} + (1+t)^{-\frac{\kappa^2-2\kappa-1}{\kappa}}\right] \quad (6.3.16) \end{aligned}$$

注意到

$$\kappa(2-\kappa) < -1 \text{和} \kappa^2 - 2\kappa - 1 > 0 \Longleftrightarrow \kappa > 1 + \sqrt{2},$$

因此, 如果 $\kappa > 1+\sqrt{2}$, 在方括号中的后一项有与 T 无关的界。因此, 由 (6.3.14) 我们得到, 对某固定的常数 C, 如果 $0 \le t \le T$ 和 $\kappa > 1+\sqrt{2}$,

$$A(t) \le \frac{A\varepsilon}{4} + C(A\varepsilon)^\kappa.$$

如果 ε 足够小, 使得 $C(A\varepsilon)^\kappa \le \frac{A\varepsilon}{4}$, 这意味着 (6.3.13) 成立。

为了处理 $2 \le \kappa \le 1+\sqrt{2}$ 的情形, 我们注意到 (6.3.16) 中的最后因子是

$$\le \begin{cases} C(\log(1+T_\varepsilon))^{1/\kappa}, & \kappa = 1+\sqrt{2}, \\ C(1+T_\varepsilon)^{-\frac{\kappa^2-2\kappa-1}{\kappa}}, & 2 \le \kappa < 1+\sqrt{2}. \end{cases}$$

这样, 由 (6.3.16)

$$A(t) \le \frac{A\varepsilon}{4} + C(A\varepsilon)^\kappa \cdot \begin{cases} (\log(1+T_\varepsilon))^{1/\kappa}, & \kappa = 1+\sqrt{2}, \\ (1+T_\varepsilon)^{-\frac{\kappa^2-2\kappa-1}{\kappa}}, & 2 \le \kappa < 1+\sqrt{2}. \end{cases}$$

由此, 如果对于 $\kappa = 1+\sqrt{2}$ 有

$$C(A\varepsilon)^{\kappa-1}(\log(1+T_\varepsilon))^{1/\kappa} \le 1/4,$$

或对于 $2 \le \kappa < 1+\sqrt{2}$ 有

$$C(A\varepsilon)^{\kappa-1}(1+T_\varepsilon)^{-\frac{\kappa^2-2\kappa-1}{\kappa}} \le 1/4,$$

则我们也就导得 (6.3.13)。

对于如同 (6.3.4) 的 T_ε, $C > 0$ 足够小, 上面两个不等式均满足。这就完成了对 $2 \le \kappa < 3$ 的存在性结果的证明。

情形 2: $1 < \kappa < 2$.

由于 F_κ 在这个 κ 的范围中仅是 C^1 的, 我们不能像前面情形直接控制 u 的 L^∞ 范数。这里, 为了得到 (6.3.9), 我们需要应用能量不等式。为方便, 我们先设当 $|u| \ge 1$ 时 (6.3.3) 也成立。最后, 由于我们将可以说明对某个 $\gamma = \gamma(\kappa) > 0$ 在 $[0, T_\varepsilon) \times \mathbb{R}^3$ 上 $u = O(\varepsilon^\gamma)$, 我们即可去掉这个假设。在这个假设下, 如果 $0 < T_* < T_\varepsilon$ 如同 (6.3.9), 由于 (6.3.12) 仍然成立, 我们能重复 (6.3.13) 的证明看到: 若 $\varepsilon > 0, C > 0$ 小, 则如果 A 如同 (6.3.12) 所取是对于线性方程解的界, 则有

$$(1+t)^{\frac{\kappa-2}{\kappa}} \sum_{|\alpha|\le 1} \|(D^\alpha u)^*(t,|x|)\|_{L^\kappa(\mathbb{R}^3)} \le \frac{A\varepsilon}{2}, 0 \le t < T_*. \tag{6.3.17}$$

如果我们对 u_0 用这些界以及 (6.3.8), 我们能用 (6.3.15) 和 (6.3.16) 同样的讨论看到对于 $\delta > 0, 0 < t < T_*$,

$$\begin{aligned} \sum_{|\alpha|\le 1} \|(D^\alpha u)^*(t,\cdot)\|_{L^{3-\delta}(\mathbb{R}^3)} &\le C\varepsilon + Ct^{\frac{\delta}{3-\delta}} \sum_{|\alpha|\le 1} \|(D^\alpha u)^*\|^\kappa_{L^\infty_s L^\kappa_x(S_t)} \\ &\le C\varepsilon + C' T_\varepsilon^{\frac{\delta}{3-\delta}} \varepsilon^\kappa T_\varepsilon^{2-\kappa}. \end{aligned}$$

最后的不等式来自 (6.3.17)。但用 T_ε 的定义可以看到

$$\varepsilon^\kappa T_\varepsilon^{2-\kappa} \le C\varepsilon\varepsilon^{\kappa-1}\varepsilon^{(\kappa-1)\frac{\kappa(2-\kappa)}{\kappa^2-2\kappa-1}}.$$

因此, 由于 $\frac{\kappa(2-\kappa)}{\kappa^2-2\kappa-1} > -1$ 我们得到若 δ 接近于 0 且固定, 以及 ε 充分小, 则

$$\sum_{|\alpha|\le 1} \|D^\alpha u(t,\cdot)\|_{L^{3-\delta}(\mathbb{R}^3)} \le C_\delta \varepsilon, \; 0 \le t < T_*. \tag{6.3.18}$$

因此, 用 Sobolev 定理我们得, 对于每个 $q \in (3, +\infty)$, 假设 ε 比某个依赖于 q 的 ε_q 小, 我们有

$$\|u(t,\cdot)\|_{L^q(\mathbb{R}^3)} \le C_q\varepsilon, 0 < t < T_*, \tag{6.3.19}$$

成立。

我们将在 $q=6$ 时用这个不等式。由 Hölder 不等式, 以及 (6.3.17) 和 (6.3.18), 我们可得

$$\sum_{|\alpha|\le 1}\|D^\alpha u(t,\cdot)\|_{L^p(\mathbb{R}^3)}\le C_p\varepsilon,\kappa\le p<3,0\le t<T_*. \tag{6.3.20}$$

特别, $u(t,\cdot)$ 和 $\nabla_x u(t,\cdot)$ 一致地属于 $L^2(\mathbb{R}^3)$, 为完成证明我们只要说明对某个 $\gamma>0$, 对二阶导数我们有下面的界

$$\|D^\alpha u(t,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\le C\varepsilon^\gamma,0\le t<T_*,|\alpha|=2. \tag{6.3.21}$$

由于假设 $0<\gamma<1$, 这个不等式与上一个不等式及 Sobolev 定理意味着 $[0,T_*)\times\mathbb{R}^3$ 中 $u=O(\varepsilon^\gamma)$。

为得到 (6.3.21), 我们用能量不等式可得, 当 $|\alpha|=2$ 时

$$\|D^\alpha u(t,\cdot)\|_{L^2}\le C\varepsilon+C\int_0^t\|\nabla_x u(s,\cdot)\cdot u^{\kappa-1}(s,\cdot)\|_{L^2}\mathrm{d}s.$$

用 Hölder 不等式可得

$$\|\nabla_x u(s,\cdot)\cdot u^{\kappa-1}(s,\cdot)\|_{L^2}\le\|\nabla_x u(s,\cdot)\|_{L^q}\|u(s,\cdot)\|_{L^6}^{\kappa-1},q=6/(4-\kappa).$$

由于对于 $1<\kappa<2$, 有 $2<6/(4-\kappa)<3$, 这样 (6.3.19),(6.3.20) 和 Hölder 不等式意味着右边是 $O(\varepsilon^\kappa)$ 的。因此, 我们得到

$$\|D^\alpha u(t,\cdot)\|_{L^2}\le C\varepsilon+C\varepsilon^\kappa T_\varepsilon,|\alpha|=2.$$

但如果 $\kappa<2$, 就存在某个 $\gamma=\gamma(\kappa)>0$, 使得 $\varepsilon^\kappa T_\varepsilon=O(\varepsilon^\gamma)$ 成立, 这给出 (6.3.21)。

§6.4　半线性波动方程的低正则初值解

在这一节我们将继续考虑 $\mathbb{R}_+^{1+3}$ 中的形如

$$\begin{cases}\Box u=F_\kappa(u)\\ u(0,\cdot)=f\in\dot H^\gamma(\mathbb{R}^3),\partial_t u(0,\cdot)=g\in\dot H^{\gamma-1}(\mathbb{R}^3)\end{cases} \tag{6.4.1}$$

的半线性方程的 Cauchy 问题。先证明其低正则解的存在性，然后给出一个在球面对称条件下的改进。

6.4.1　低正则解的存在性

由于我们的目标是低正则性问题，所以所考虑空间的 Sobolev 指数 γ 总设为比 3/2 小。因此，这样的初值未必有界，为此我们必须加强对非线性的限制。先设对一个给定的 $\kappa > 2, F_\kappa$ 满足

$$|F_\kappa(u)| \le C|u|^\kappa, \text{和} C^{-1}|F_\kappa(u)| \le |uF_\kappa'(u)| \le C|F_\kappa(u)| \tag{6.4.2}$$

的 C^1 函数，其中 C 是一个绝对常数且不等式对所有 $u \in \mathbb{R}$ 都成立。这样，对 $j = 0, 1$

$$|F_\kappa^{(j)}(u)| \le C|u|^{\kappa - j}.$$

在这些假设下，我们要找一个依赖于 κ 的最小的 γ，使得 (6.4.1) 的弱解 $(u, \partial_t u) \in C([0,T]; \dot{H}^\gamma \times \dot{H}^{\gamma-1})$。

定理 6.4.1　*对于给定的 $\kappa > 2$ 令*

$$\gamma = \gamma(\kappa) = \begin{cases} \frac{3}{2} - \frac{2}{\kappa - 1}, \ \kappa \ge 3, \\ 1 - \frac{1}{\kappa - 1}, \ 2 < \kappa \le 3, \end{cases} \tag{6.4.3}$$

则存在 $T > 0$ 和 (6.4.1) 的唯一的弱解满足

$$(u, \partial_t u) \in C([0,T]; \dot{H}^\gamma \times \dot{H}^{\gamma-1}) \text{和} u \in L_t^s L_x^{2(\kappa-1)}([0,T] \times \mathbb{R}^3), \tag{6.4.4}$$

其中 $s = \max\{2(\kappa-1), 2(\kappa-1)/(\kappa-2)\}$。

此外，如果 $\kappa \ge 3$ 存在一个 $\varepsilon(\kappa) > 0$ 使得：如果

$$\|f\|_{\dot{H}^\gamma(\mathbb{R}^3)} + \|g\|_{\dot{H}^{\gamma-1}(\mathbb{R}^3)} < \varepsilon(\kappa), \tag{6.4.5}$$

则我们能取 $T = \infty$，在这种情形 (6.4.1) 有满足 (6.4.4) 的唯一的整体弱解。最后，对于 $\kappa > 2$，如果 T_* 记所有使得满足 (6.4.4) 的方程 (6.4.1) 的解的存在时间 $T > 0$ 的上确界，则或 $T_* = \infty$ 或 $u \notin L^{2(\kappa-1)}([0, T_*) \times \mathbb{R}^3)$。

注意到 (6.4.3) 能重新写为

$$\gamma = \gamma(\kappa) = \max\{\frac{3}{2} - \frac{2}{\kappa - 1}, 1 - \frac{1}{\kappa - 1}\}. \tag{6.4.6}$$

一个简单的标尺度平衡讨论说明，为要求 (6.4.1) 具有适定性，人们总要有 $\gamma \ge \frac{3}{2} - \frac{2}{\kappa-1}$。为此，回顾上一节的结果我们总能选取 $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ 使得具初值 $(0, g)$ 的 $\Box u = |u|^\kappa$ 的解有生命区间 $0 < T_* < \infty$。但 $u_\varepsilon(t,x) = \varepsilon^{-2/(\kappa-1)} u(t/\varepsilon, x/\varepsilon)$ 满足同样的方程，而这时的初值是 $(0, g_\varepsilon), g_\varepsilon = \varepsilon^{-2/(\kappa-1)-1} g(x/\varepsilon)$。$u_\varepsilon$ 的生命区间显然是 $T_\varepsilon = \varepsilon T_*$。用齐次 Sobolev 范数的定义我们发现 $\|g_\varepsilon\|_{\dot{H}^{\gamma-1}} / \|g_1\|_{\dot{H}^{\gamma-1}} = \varepsilon^{(3/2 - 2/(\kappa-1) - \gamma)}$。这样，如果 $\gamma < 3/2 - 2/(\kappa - 1)$，生命区间和初值的范数均随 ε 而趋于 0。由于 g 是紧支集的，这样我们能对初值进行就范化、伸缩、平移得到新的初值，对这样的初值就可说明问题的解在任意小带形区域中都没有局部存在性。

我们也需要 $\gamma \geq 1-1/(\kappa-1)$ 的事实是很难看到的。讨论将借助于

$$u_{\alpha\beta}(t,x)=\frac{c_\alpha(1-\beta^2)^{\alpha/2}}{(\varepsilon-(t-\beta x_1))^\alpha}, c_\alpha=(\alpha(\alpha+1))^{\alpha/2}, \alpha=\frac{2}{\kappa-1},$$

满足 $\Box u_{\alpha\beta}=|u_{\alpha\beta}|^\kappa$ 以及当 $t-\beta x_1=\varepsilon$ 时破裂的事实。由于 $u_{\alpha\beta}$ 仅依赖于 t 和 x_1, Cauchy 初值当然就没有紧支集。然而，人们能截断 $|x|>\varepsilon$ 处的初值使得其结果解当 $t=\varepsilon$ 和 $x=0$ 时仍破裂。我们所构造解的初值有范数 $O((1-\beta^2)^{1-1/(\kappa-1)-\gamma}\cdot\varepsilon^{3/2-2/\kappa-\gamma})$, 这样，如果 $\gamma<1-1/(\kappa-1)$, 我们能选取序列 $\beta\nearrow 1$ 和 $\varepsilon\searrow 0$ 使得初值的两个 $\dot{H}^\gamma\times\dot{H}^{\gamma-1}$ 范数和生命区间趋于 0。因此，由上面的理由，我们得到如果 $\gamma<1-1/(\kappa-1)$ 就没有 (6.4.1) 的适定性。更细致的可以参考 Lindblad 和 Sogge 的文章。

在前面构造 Cauchy 初值的过程中，我们使用了集中在高度离心的集上的函数，在下一小节，我们将看到，如果我们假设球面对称，对于假设 $\kappa\geq 3$ 的 定理 6.4.1 的结论对更大范围的 $\kappa>1+\sqrt{2}$ 仍然成立。指数 3 是使得在 $\mathbb{R}^{1+3}$ 的 Lorentz 变换下方程的形式 $\Box u=C|u|^{\kappa-1}u$ 保持不变的唯一的指数。这样，在非径向情形，定理 6.4.1 的结论告诉我们在 $\dot{H}^\gamma$ 空间中适定性，取决于超共形 $\kappa\geq 3$ 还是次共形 $\kappa\leq 3$。另一方面，如我们刚刚所指，在球面对称的假设下，John 的指数 $\kappa=1+\sqrt{2}$ 扮演了这样一个方程的共形指数的角色。

定理 6.4.1 的证明将要求对 $\kappa\leq 5$ 和 $\kappa>5$ 作不同的讨论。对 $\kappa\leq 5$ 的情形更直接一些，我们先处理，对“临界”和“次临界”指数 $\kappa\leq 5$ 其结果将是下面的估计的推论。

在这一小节的剩余部分我们将利用上面的不等式证明 定理 6.4.1。为此我们先讨论存在性，且从“临界”与“次临界”开始。

对 $\kappa\leq 5$ 时存在性的证明

情形 1: $2<\kappa\leq 3$。

如同往常，令 $u_{-1}\equiv 0$, $u_m, m=0,1,2,\cdots$ 归纳地定义如下

$$\begin{cases}\Box u_m=F_\kappa(u_{m-1}),\\ u_m(0,\cdot)=f, \partial_t u_m(0,\cdot)=g,\end{cases}$$

其中 $(f,g)\in\dot{H}^\gamma\times\dot{H}^{\gamma-1}$ 如同 (6.4.1), 则主要的步骤包括

引理 6.4.1 *对于给定的 $\kappa\in(2,3]$, 令 $\gamma=1-\frac{1}{\kappa-1}$, 记*

$$A_m(T)=\|u_m\|_{L_t^{\frac{2}{\gamma}}L_x^{\frac{2\kappa}{2-\gamma}}(S_T)}, B_m(T)=\|u_m-u_{m-1}\|_{L_t^{\frac{2}{\gamma}}L_x^{\frac{2\kappa}{2-\gamma}}(S_T)}, \tag{6.4.7}$$

则存在一个 $\varepsilon_0=\varepsilon_0(\kappa)>0$ 使得如果 $2A_0(T)T^{\frac{1}{\kappa-1}-1/2}\leq\varepsilon_0$, 对于 $m=0,1,2\cdots$, 有

$$A_m(T)\leq 2A_0(T),\ B_{m+1}(T)\leq\frac{1}{2}B_m(T). \tag{6.4.8}$$

证明　我们要用 (3.6.30) 和归纳法。首先注意到如果 γ 如上，有 $\frac{2\kappa}{2-\gamma}=2(\kappa-1)$, 则 $2-\gamma=\kappa/(\kappa-1)$。因此 $\frac{2-\gamma}{2}=\frac{2-\gamma}{2\kappa}+\frac{1}{2}$。基于这一点，以及

$$\Box(u_{m+1}-u_{j+1})=V_\kappa(u_m,u_j)(u_m-u_j), V_\kappa(u,v)=\frac{F_\kappa(u)-F_\kappa(v)}{u-v}$$

利用 (3.6.30) 和 Hölder 不等式, 我们可得, 如果 $\|V_\kappa(u_m,u_j)\|_{L^2(S_T)}\le 1/2C_\gamma$, 则有

$$\begin{aligned}\|u_{m+1}-u_{j+1}\|_{L_t^{\frac{2}{\gamma}}L_x^{\frac{2\kappa}{2-\gamma}}(S_T)} &\le C_\gamma\|V_\kappa(u_m,u_j)\cdot(u_m-u_j)\|_{L_t^{\frac{2}{1+\gamma}}L_x^{\frac{2}{2-\gamma}}(S_T)}\\ &\le \frac{1}{2}\|u_m-u_j\|_{L_t^{\frac{2}{\gamma}}L_x^{\frac{2\kappa}{2-\gamma}}(S_T)}.\end{aligned} \tag{6.4.9}$$

由于 $|V_\kappa(u,v)|\le C(|u|+|v|)^{\kappa-1}$, 必存在一个 $\varepsilon_0>0$ 使得, 如果

$$\|u_k\|_{L^{2(\kappa-1)}(S_T)}\le\varepsilon_0,\ k=m,j, \tag{6.4.10}$$

则 (6.4.9) 中的条件就能满足。而由 Hölder 不等式, 如果

$$A_k(T)T^{\frac{1}{2(\kappa-1)}-\frac{\gamma}{2}}=A_k(T)T^{\frac{1}{\kappa-1}-\frac{1}{2}}\le\varepsilon_0, \tag{6.4.11}$$

就有 (6.4.10) 成立。接下来我们用归纳证明 $A_m(T)\le 2A_0(T)$。由 (6.4.8) 的条件这意味着 (6.4.11) 成立。因此, 设这个估计当 m 时成立, 我们要说明由它可得到 A_{m+1} 的界。为此, 在 (6.4.9) 中选取 $j=-1$, 得:

$$\text{如果}A_m(T)T^{\frac{1}{\kappa-1}-\frac{1}{2}}\le\varepsilon_0,\text{则 } A_{m+1}\le A_0+1/2A_m.$$

由归纳假设和 (6.4.8) 中的假设条件, 上面的条件成立。我们就得到了所要求的 (6.4.8) 的第一部分。另一部分只来自于取 (6.4.9) 中的 $j=m-1$。

用引理我们容易得到对 $2<\kappa\le 3$ 时的存在性。由 (3.6.30) 我们首先注意到

$$A_0(T)\le C_\gamma(\|f\|_{\dot H^\gamma(\mathbb{R}^3)}+\|g\|_{\dot H^{\gamma-1}(\mathbb{R}^3)}).$$

这样我们总能选取 T 满足 (6.4.8) 的条件。由于 $B_0(T)=A_0(T)$, 得到 u_m 在 $L_t^{\frac{2}{\gamma}}L_x^{\frac{2\kappa}{2-\gamma}}(S_T)$ 中收敛, 因此在分布意义下成立。

为看到 $F_\kappa(u_m)$ 弱收敛于 $F_\kappa(u)$。只要看到

$$\|F_\kappa(u_{m+1})-F_\kappa(u_m)\|_{L_t^{\frac{2}{1+\gamma}}L_x^{\frac{2}{2-\gamma}}(S_T)}\le C2^{-m},$$

因为这就有在 $L_t^{\frac{2}{1+\gamma}}L_x^{\frac{2}{2-\gamma}}(S_T)$ 中 $F_\kappa(u_m)\to F_\kappa(u)$。然而, 由于

$$\|F_\kappa(u_{m+1})-F_\kappa(u_m)\|_{L_t^{\frac{2}{1+\gamma}}L_x^{\frac{2}{2-\gamma}}(S_T)}\le\|V_\kappa(u_{m+1},u_m)\|_{L^2(S_T)}\|u_{m+1}-u_m\|_{L_t^{\frac{2}{\gamma}}L_x^{\frac{2\kappa}{2-\gamma}}(S_T)},$$

这是显然的。这样, 我们已经说明 u 必是 (6.4.1) 的一个弱解满足 (6.4.4) 的第二部分。如果我们假设初值属于 C_0^∞, 则第一部分来自于 (3.6.30) 和 (6.4.8), 因为这样的 $(u_m,\partial_t u_m)$ 必是 $C([0,T];\dot H^\gamma\times\dot H^{\gamma-1})$ 中收敛于 $(u,\partial_t u)$ 的一个 Cauchy 序列。与线性情形一样, 上面的关于初值的假设能通过 (3.6.30) 的标准的逼近讨论去掉。这就完成了对 $2<\kappa\le 3$ 的 定理 6.4.1 的存在性部分的证明。

情形 2: $3\le\kappa\le 5$.

这里主要的步骤是得到下面的

引理 6.4.2 对于给定的 $\kappa \in [3,5]$, 设 $\gamma = 3/2 - 2/(\kappa - 1)$,

$$A_m(T) = \|u_m\|_{L_t^{\frac{2\kappa}{1+\gamma}} L_x^{\frac{2\kappa}{2-\gamma}}(S_T)}, \text{和 } B_m(T) = \|u_m - u_{m-1}\|_{L_t^{\frac{2\kappa}{1+\gamma}} L_x^{\frac{2\kappa}{2-\gamma}}(S_T)} \tag{6.4.12}$$

存在一个 $\varepsilon_0 > 0$, 使得如果 $2A_0(T) \le \varepsilon_0$, 对于 $m = 0, 1, 2, \cdots$, 我们有

$$A_m(T) \le 2A_0(T), B_{m+1}(T) \le \frac{1}{2}B_m(T). \tag{6.4.13}$$

证明 我们采用在 引理 6.4.1 用过的方法, 但稍简单些, 因为 (3.6.28) 中的范数关于叠代的性态好。首先注意到：如果用 Hölder 不等式及 $V_\kappa = O(|u_m|^{\kappa-1} + |u_j|^{\kappa-1})$ 的事实, 我们有

$$\begin{aligned}
&\|u_{m+1} - u_{j+1}\|_{L_t^{\frac{2\kappa}{1+\gamma}} L_x^{\frac{2\kappa}{2-\gamma}}(S_T)} \le C\|V_\kappa(u_m, u_j)(u_m - u_j)\|_{L_t^{\frac{2}{1+\gamma}} L_x^{\frac{2}{2-\gamma}}(S_T)} \\
\le\ & C'(\|u_m\|^{\kappa-1}_{L_t^{\frac{2\kappa}{1+\gamma}} L_x^{\frac{2\kappa}{2-\gamma}}(S_T)} + \|u_j\|^{\kappa-1}_{L_t^{\frac{2\kappa}{1+\gamma}} L_x^{\frac{2\kappa}{2-\gamma}}(S_T)})\|u_m - u_j\|_{L_t^{\frac{2\kappa}{1+\gamma}} L_x^{\frac{2\kappa}{2-\gamma}}(S_T)}.
\end{aligned}$$

这样，如果 $\varepsilon_0^{\kappa-1}C' < 1/4$ 且我们设

$$A_{m+1}(T) \le A_0(T) + 1/2A_m(T),$$

由归纳法得 (6.4.13) 的第一部分。取 $j = m - 1$ 得到另一部分。

为用这个引理得到这个范围中的 κ 对 (6.4.1) 的存在性, 我们首先注意到 (3.6.28) 意味着

$$\|u_0\|_{L_t^{\frac{2\kappa}{1+\gamma}} L_x^{\frac{2\kappa}{2-\gamma}}(\mathbb{R}_+^{1+3})} \le C(\|f\|_{\dot{H}^\gamma} + \|g\|_{\dot{H}^{\gamma-1}}).$$

因此, 如果初值有小范数对所有的 T 必有 $2A_0(T) \le \varepsilon_0$。否则，由控制收敛定理这个不等式将对某个 $T > 0$ 满足。因此，如果我们在第一种情形令 $T = \infty$ 和第二种情形 T 是有限，我们能如前讨论得到存在 (6.4.1) 的一个弱解满足 (6.4.4) 的第一部分，也有

$$u \in L_t^{\frac{2\kappa}{1+\gamma}} L_x^{\frac{2\kappa}{2-\gamma}}(S_T) = L_t^{\frac{4\kappa(\kappa-1)}{5\kappa-9}} L_x^{\frac{4\kappa(\kappa-1)}{\kappa+3}}(S_T).$$

由 Sobolev 定理, 对 $0 \le t \le T$ 我们有

$$\|u(t,\cdot)\|_{L_x^{\frac{6}{3-2\gamma}}(\mathbb{R}^3)} \le C\|u(t,\cdot)\|_{\dot{H}^\gamma(\mathbb{R}^3)},$$

这样 $u \in L_t^\infty L_x^{\frac{6}{3-2\gamma}}(S_T) = L_t^\infty L_x^{\frac{3(\kappa-1)}{2}}(S_T)$。因此由 Hölder 不等式我们得到 (6.4.4) 的另一部分

$$\|u\|_{L_t^{2(\kappa-1)} L_x^{2(\kappa-1)}(S_T)} \le \|u\|^\theta_{L_t^{\frac{4\kappa(\kappa-1)}{5\kappa-9}} L_x^{\frac{4\kappa(\kappa-1)}{\kappa+3}}(S_T)} \|u\|^{1-\theta}_{L_t^\infty L_x^{\frac{3(\kappa-1)}{2}}(S_T)}, \theta = 2\kappa/(5\kappa - 9).$$

这就完成了当 $3 \le \kappa \le 5$ 时 定理 6.4.1 的存在性部分的证明。

$\kappa > 5$ 时, 存在性的证明

引理 6.4.3 给定 $\kappa > 5$, 令 $\gamma = 3/2 - 2/(\kappa - 1)$ 和 $q = 2(\kappa - 1)$, 令

$$A_m(T) = \|(\sqrt{-\Delta_x})^{1-2/(\kappa-1)}u_m\|_{L^4(S_T)} + \|u_m\|_{L^q(S_T)}, \tag{6.4.14}$$

$$B_m(T) = \|u_m - u_{m-1}\|_{L^4(S_T \cap \wedge_{R,0})}, \tag{6.4.15}$$

其中 $\wedge_{R,0} = \{(t,x) \in \mathbb{R}_+^{1+3} : |x| < R - t, t \geq 0\}$, $R < \infty$。则存在一个 $\varepsilon_0 > 0$, 使得, 如果 $A_0(T) \leq \varepsilon_0$, 对于 $m = 0, 1, 2, \cdots$, 有

$$A_m(T) \leq 2A_0(T), B_{m+1}(T) \leq 1/2B_m(T). \tag{6.4.16}$$

这证明不像前面两个引理这样基本, 这要用到所谓分数次导数的 Leibniz 公式。这个结果是说如果 $F(u) \in C^1$ 且存在常数 C_0 满足 $C_0^{-1} \leq |uF'(u)|/|F(u)| \leq C_0$, 则如果 $1 < q < p, r < \infty$和$0 < \sigma \leq 1$, 我们有

$$\|(\sqrt{-\Delta_x})^\sigma F(u)\|_{L^q} \leq C\|F'(u)\|_{L^p}\|(\sqrt{-\Delta_x})^\sigma u\|_{L^r}, \frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{r}, \tag{6.4.17}$$

其中 C 依赖于 C_0, σ, p, q 和 r(见 Christ [8])。

引理 6.4.3 **的证明** 我们要对 $q = 4/3, p = 2$和$r = 4$ 用 (6.4.17), 具体地, 这个不等式与 (3.6.33) 应用到方程 $\Box(u_{m+1} - u_0) = F_\kappa(u_m)$ 给出

$$A_{m+1} \leq C_q\|F_\kappa'(u_m)\|_{L^2(S_T)}A_m + A_0 \leq C_q'\|u_m\|_{L^q(S_T)}^{\kappa-1}A_m + A_0 \leq C_q'A_m^\kappa + A_0.$$

这样我们要选择 (6.4.16) 中的 ε_0 足够小使得 $C_q'2^\kappa\varepsilon_0^{\kappa-1} < 1$, 然后用归纳得 $A_{m+1} \leq 2A_0$, 由于我们已经说明 (6.4.10) 成立, 对 B_m 的估计来自于 引理 6.4.1 的证明。事实上, (3.6.24) 和考虑到依赖区域给出

$$B_{m+1}(T) \leq C\|F_\kappa(u_m) - F_\kappa(u_{m-1})\|_{L^{4/3}(S_T \cap \wedge_{R,0})} \leq C\varepsilon_0^{\kappa-1}B_m(T),$$

如果 $C\varepsilon_0^{\kappa-1} < 1/2$ 就得到所要求的界。

下面我们说明如何从这个引理得到当 $\kappa > 5$ 时 (6.4.1) 的存在性结果。如前的讨论, 我们总能选取 $T > 0$ 使得 (6.4.16) 成立。如果初值的范数足够小我们能取 $T = \infty$。

注意到 $2(\kappa - 1) > 4$, Hölder 不等式意味着 $B_0(T) \leq C_R A_0(T)$。这样, 由 (6.4.16), u_m 在 $L_{loc}^4(S_T)$ 中收敛, 因此在 $\mathcal{D}'$ 中也收敛, 且几乎处处收敛。类似地, 用 Hölder 不等式我们看到 $F_\kappa(u_m)$ 在 L_{loc}^1 中收敛于 $F_\kappa(u)$。因此 u 是 (6.4.1) 的一个弱解。

为证它满足 (6.4.4), 我们首先注意到, 由 Fatou 引理

$$\|u\|_{L^q(S_T)} \leq \liminf_{m\to\infty}\|u_m\|_{L^q(S_T)} \leq 2A_0(T) < \infty, q = 2(\kappa - 1). \tag{6.4.18}$$

这就给出了 (6.4.4) 的第二部分。另外如果 $\phi \in C_0^\infty(S_T)$, 则也有当 $m \to \infty$ 时, $\langle u_m, \phi\rangle \to \langle u, \phi\rangle$ 成立。因此, 由

$$|\langle u_m, \phi\rangle| \leq 2A_0\|(\sqrt{-\Delta_x})^{-(1-2/(\kappa-1))}\phi\|_{L^{4/3}},$$

得
$$|\langle u,\phi\rangle| \le 2A_0\|(\sqrt{-\Delta_x})^{-(1-2/(\kappa-1))}\phi\|_{L^{4/3}},$$
从而就有 $(\sqrt{-\Delta_x})^{1-2/(\kappa-1)}u \in L^4(S_T)$。这与 (6.4.17),(6.4.18) 一起意味着
$$(\sqrt{-\Delta_x})^{1-2/(\kappa-1)}F_\kappa(u) \in L^{4/3}(S_T).$$
因此, 我们能用 定理 3.6.5 得到 (6.4.4) 的第一部分也成立。

为完成 定理 6.4.1 唯一性的证明, 我们将需要下面的结果

定理 6.4.2 设 $V \in L^2([0,T]\times\mathbb{R}^3)$, $(f,g) \in \dot{H}^\gamma(\mathbb{R}^3)\times\dot{H}^{\gamma-1}(\mathbb{R}^3)$, $0<\gamma<1$, Cauchy 问题
$$\Box u = Vu, u(0,\cdot)=f, \partial_t u(0,\cdot)=g \tag{6.4.19}$$
有唯一解满足
$$(u,\partial_t u)\in C([0,T];\dot{H}^\gamma(\mathbb{R}^3)\times\dot{H}^{\gamma-1}(\mathbb{R}^3)) \text{ 和 } u\in L_t^{\frac{2}{\gamma}}L_x^{\frac{2}{1-\gamma}}(S_T).$$
此外, 存在一个常数 C_γ 使得对 $0\le t\le T$
$$\begin{aligned}&\|u(t,\cdot)\|_{\dot{H}^\gamma}+\|\partial_t u(t,\cdot)\|_{\dot{H}^{\gamma-1}}\\ \le\;& 2\exp(C_\gamma\int_{S_T}|V(t,x)|^2\mathrm{d}t\mathrm{d}x)(\|f\|_{\dot{H}^\gamma}+\|g\|_{\dot{H}^{\gamma-1}}).\end{aligned} \tag{6.4.20}$$
对于 $1/2\le\gamma<3/2$, 如果 $u\in L^{\frac{8}{3-2\gamma}}(S_T),(\sqrt{-\Delta_x})^{\gamma-1/2}u\in L^4(S_T)$, 满足具初值 (f,g) 的方程 $\Box u = F(u)$, 则我们有
$$\begin{aligned}&\|u(t,\cdot)\|_{\dot{H}^\gamma}+\|\partial_t u(t,\cdot)\|_{\dot{H}^{\gamma-1}}\\ \le\;& 2\exp\left(C_\gamma\int_{S_T}|F'(u(t,x))|^2\mathrm{d}t\mathrm{d}x\right)(\|f\|_{\dot{H}^\gamma}+\|g\|_{\dot{H}^{\gamma-1}})\end{aligned} \tag{6.4.21}$$

证明 先证 (6.4.20)。我们要用 (3.6.23) 到方程 $\Box(u-u_0)=Vu$, 其中 u_0 是 $\Box u_0=0$ 在 $t=0$ 与 u 有同样初值的解。设 $T_1\le T$ 是使得
$$\|V\|_{L^2(S_{T_1})}\le\varepsilon_\gamma$$
的最大数, 其中 ε_γ 在以后给定。特别地, 如果 $\varepsilon_\gamma\le 1/(2C_\gamma)$, 其中 C_γ 是 (3.6.23) 中的常数, 则如果 u 在 $L_t^{\frac{2}{\gamma}}L_x^{\frac{2}{1-\gamma}}(S_T)$ 中有界, 我们有
$$\|u-u_0\|_{L_t^{\frac{2}{\gamma}}L_x^{\frac{2}{1-\gamma}}(S_T)}\le\frac{1}{2}\|u\|_{L_t^{\frac{2}{\gamma}}L_x^{\frac{2}{1-\gamma}}(S_T)},$$
这意味着
$$\|u\|_{L_t^{\frac{2}{\gamma}}L_x^{\frac{2}{1-\gamma}}(S_T)}\le 2\|u_0\|_{L_t^{\frac{2}{\gamma}}L_x^{\frac{2}{1-\gamma}}(S_T)} \quad 0\le T\le T_1. \tag{6.4.22}$$
这立即给出了 (6.4.19) 的解的唯一性, 因为如果有两个解 u_1 和 u_2 具有相同初值, 则 $u=u_1-u_2$ 与对应的 $u_0=0$ 满足相同的方程。如上存在性的证明, 我们能构造一个

(6.4.19) 的解, 使得 u 在 $L_t^{\frac{2}{\gamma}} L_x^{\frac{2}{1-\gamma}}(S_T)$ 中是有界的。事实上，这可通过取如下定义的迭代序列 $\{u_m\}$:

$u_{-1}=0, u_m$ 为具 (6.4.19) 中的初值的方程 $\Box u_m = V u_{m-1}$ 的解, $m=0,1,\cdots$, 的极限 $u=\lim_{m\to\infty} u_m$ 得到。

接下来，如果用 (3.6.23) 和如同引理 6.4.1 的证明中的讨论，我们发现

$$\begin{aligned} & \|(u-u_0)(T,\cdot)\|_{\dot{H}^\gamma} + \|\partial_t(u-u_0)(T,\cdot)\|_{\dot{H}^{\gamma-1}} \\ \le\ & C_\gamma \|V\|_{L^2(S_T)} \|u\|_{L_t^{\frac{2}{\gamma}} L_x^{\frac{2}{1-\gamma}}(S_T)} \\ \le\ & 2C_\gamma \|V\|_{L^2(S_T)} \|u_0\|_{L_t^{\frac{2}{\gamma}} L_x^{\frac{2}{1-\gamma}}(S_T)} \end{aligned}$$

但如果我们再一次应用 (3.6.23), 上式最后的因子:

$$\|u_0\|_{L_t^{\frac{2}{\gamma}} L_x^{\frac{2}{1-\gamma}}(S_T)} \le C_\gamma(\|f\|_{\dot{H}^\gamma} + \|g\|_{\dot{H}^{\gamma-1}}).$$

这样，如果 $2C_\gamma^2 \varepsilon_\gamma < 1$, 由能量恒等式

$$\|u_0(T,\cdot)\|_{\dot{H}^\gamma} + \|\partial_t u_0(T,\cdot)\|_{\dot{H}^{\gamma-1}} = \|f\|_{\dot{H}^\gamma} + \|g\|_{\dot{H}^{\gamma-1}},$$

我们有

$$\|u(T,\cdot)\|_{\dot{H}^\gamma} + \|\partial_t u(T,\cdot)\|_{\dot{H}^{\gamma-1}} \le 2(\|f\|_{\dot{H}^\gamma} + \|g\|_{\dot{H}^{\gamma-1}}), T \le T_1. \tag{6.4.23}$$

因此，如果 (6.4.22) 成立, 我们就可得到 (6.4.20)。如果 T 太大使得 (6.4.22) 不能成立, 用 $T_1 = T$ 我们能重复这个讨论。对于一个给定的 T 我们选取 $0=T_0<T_1<\cdots<T_N<T_{N+1}=T$, 使得

$$\|V\|_{L^2([T_k,T_{k+1}]\times\mathbb{R}^3)} = \varepsilon_\gamma, k=0,\cdots N-1, \text{和 } \|V\|_{L^2([T_N,T_{N+1}]\times\mathbb{R}^3)} \le \varepsilon_\gamma,$$

则

$$\int_{S_T} |V(t,x)|^2 \mathrm{d}t\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{N} \|V\|^2_{L^2([T_k,T_{k+1}]\times\mathbb{R}^3)} \ge N\varepsilon_\gamma^2. \tag{6.4.24}$$

重复讨论导数 (6.4.23) N 次得

$$\|u(T,\cdot)\|_{\dot{H}^\gamma} + \|\partial_t u(T,\cdot)\|_{\dot{H}^{\gamma-1}} \le 2^N(\|f\|_{\dot{H}^\gamma} + \|g\|_{\dot{H}^{\gamma-1}}), 0 \le T \le T_N.$$

如果我们用 (6.4.24) 即可得 (6.4.20), 其中 $C_\gamma = \varepsilon_\gamma^{-2}\log 2$。

(6.4.21) 的证明类似, 这里我们用 (3.6.33) 取代 (3.6.23)。

定理 6.4.1 唯一性的证明 注意到如果 $2<\kappa\le 3, \gamma=1-1/(\kappa-1)$, 则 $2/(1-\gamma)=2(\kappa-1)$ 和 $2/\gamma = 2(\kappa-1)/(\kappa-2)$, 因此 (6.4.4) 和 (6.4.20) 对次共形范围 $\kappa\le 3$ 给出了 定理 6.4.1 的唯一性部分。如果我们取 $V=F_\kappa(u)/u$, 则显然 定理 6.4.2 意味着如果对任何 $\kappa>2$, 对所有 $0\le T<T_*<\infty$, (6.4.4) 成立, 则或 $u\notin L^{2(\kappa-1)}(S_{T_*})$ 或 u 能拓延到一个更大范围的解。

这样，剩下来的仅是对 $\kappa > 3$ 时 定理 6.4.1 的唯一性。严格地说，这并不来自于前面的定理；然而这容易从 Strichartz 不等式 (3.6.24) 得到。事实上，如果 u_1 和 u_2 是满足 (6.4.4) 的 (6.4.1) 的两个解，则 $w = u_1 - u_2$ 满足零初值和 $V = (F_\kappa(u_1) - F_\kappa(u_2))/(u_1 - u_2) \in L^2(S_T)$。这样，如果 $\wedge_{R,0}$ 如同 引理 6.4.3，如果我们用 (3.6.24) 得

$$\begin{aligned}\|u_1 - u_2\|_{L^4(S_T\cap\wedge_{R,0})} &\leq C\|V\cdot(u_1 - u_2)\|_{L^{4/3}(S_T\cap\wedge_{R,0})}\\ &\leq C\|V\|_{L^2(S_T)}\|u_1 - u_2\|_{L^4(S_T\cap\wedge_{R,0})}.\end{aligned}$$

由于 $2(\kappa - 1) > 4, u_1 - u_2 \in L^4(S_T \cap \wedge_{R,0})$。因此我们得到如果 T 足够小，$\|u_1 - u_2\|_{L^4(S_T\cap\wedge_{R,0})} = 0$，因此 $u_1 = u_2$ 在 $S_T \cap \wedge_{R,0}$ 成立。重复有限次我们将说明对任何固定的 $T > 0$ 同样的结论成立。这就完成了唯一性的证明。

6.4.2　在球面对称下改进的结果

这一小节说明，由于在球面对称的假设下有更好的 Strichartz 估计，我们对形如 $\Box u = F_\kappa(u)$ 满足径向初值的问题有更好的存在性结果。特别地，在这种情形，John 的指数 $\kappa = 1 + \sqrt{2}$ 扮演了共形指数 $\kappa = 3$ 的角色，至少在极小正则性的假设下的存在性定理中起到了这样的作用。具体地，用 定理 3.6.9 和对 Cauchy 问题的一些相关的估计我们有

定理 6.4.3 *设 $1 + \sqrt{2} < \kappa < 3$，固定 F_κ 满足 (6.4.2)，设 f, g 是球面对称函数，存在一个 $\varepsilon(\kappa) > 0$ 使得，如果*

$$\|f\|_{\dot{H}^\gamma(\mathbb{R}^3)} + \|g\|_{\dot{H}^{\gamma-1}(\mathbb{R}^3)} < \varepsilon(\kappa), \gamma = 3/2 - 2/(\kappa - 1), \tag{6.4.25}$$

则存在

$$\Box u = F_\kappa(u), u(0,\cdot) = f, \partial_t u(0,\cdot) = g \tag{6.4.26}$$

的唯一整体弱解 $u \in L_t^{\frac{\kappa(\kappa-1)}{3-\kappa}} L_x^\kappa(\mathbb{R}_+^{1+3})$。

对于 $2 \leq \kappa < 1 + \sqrt{2}$，存在 $\varepsilon(\kappa) > 0$ 使得：如果 $0 < \varepsilon < \varepsilon(\kappa)$ 和

$$\|f\|_{\dot{H}^\gamma(\mathbb{R}^3)} + \|g\|_{\dot{H}^{\gamma-1}(\mathbb{R}^3)} < \varepsilon, \gamma = 1/2 - 1/\kappa, \tag{6.4.27}$$

则存在一个唯一的解 $u \in L_t^{\kappa^2} L_x^\kappa([0, T_\varepsilon] \times \mathbb{R}^3), T_\varepsilon = \varepsilon^{\frac{\kappa(\kappa-1)}{\kappa^2-2\kappa-1}}$。

在上一节我们指出过，对于整体存在性定理我们总需要 $\gamma \geq 3/2 - 2/(\kappa - 1)$。即使对局部存在性结果我们也需要 $\gamma \geq 1/2 - 1/\kappa$。为看到这一点，我们注意到，如果 $g(x) = \chi(x)/|x|^{2+1/\kappa}$，$\chi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$，则对任何 $\gamma < 1/2 - 1/\kappa, g \in \dot{H}^{\gamma-1}(\mathbb{R}^3)$。另一方面，如果 $\chi \geq 0$ 和 $\chi(0) = 1$，Cauchy 问题 $\Box u_0 = 0$，初值为 $(0, g)$ 的解是一个非负函数，如果 $\mathcal{N}$ 是 $\mathbb{R}_+^{1+3}$ 原点的一个任意邻域，这个解不在 $L^\kappa(\mathcal{N})$ 中。这是由于这样的 $u_0 \approx t^{-1}|t - |x||^{-1/\kappa}$，由比较定理可得，(6.4.26) 在原点附近不能有局部弱解。事实上，如果存在这样的一个解，则我们有 $u \geq u_0$，因此在 $\mathbb{R}_+^{1+3}$ 中的原点附近 $|u|^\kappa \notin L^1$。也即 $|u|^\kappa$ 不能是一个分布，这样 (6.4.26) 没有意义，得到矛盾。

这样，即使对紧支集初值，条件 $\gamma \geq \max\{3/2-2/(\kappa-1), 1/2-1/\kappa\}$ 在定理中是本质的。有趣的是，对 $\kappa>0, 3/2-2/(\kappa-1)=1/2-1/\kappa \Longleftrightarrow \kappa=1+\sqrt{2}$。

为证明定理，我们先回顾 定理 3.6.9 的结论: 如果 w 是具零初值的 $\mathbb{R}_+^{1+3}$ 中的非齐次方程 $\Box w=F$ 的解，其中 F 是球面对称的，则

$$\|w\|_{L_t^{\frac{\kappa(\kappa-1)}{3-\kappa}} L_x^1(\mathbb{R}_+^{1+3})} \leq C_\kappa \|F\|_{L_t^{\frac{\kappa-1}{3-\kappa}} L_x^\kappa(\mathbb{R}_+^{1+3})}, 1+\sqrt{2}<\kappa<3 \tag{6.4.28}$$

和

$$\|w\|_{L_t^{\kappa^2} L_x^\kappa([0,T]\times\mathbb{R}^3)} \leq CT^{\frac{1+2\kappa-\kappa^2}{\kappa^2}} \|F\|_{L_t^\kappa L_x^1([0,T]\times\mathbb{R}^3)}, 2\leq\kappa<1+\sqrt{2}. \tag{6.4.29}$$

最后的不等式来自于 (3.6.74) 和如果 $\kappa<1+\sqrt{2}, \kappa^2<\kappa/(\kappa-2)$ 的事实。

定理 6.4.3 的证明 我们仅证明存在性部分, 唯一性来自于类似的讨论。设 $1+\sqrt{2}<\kappa<3$, 设 $u_{-1}\equiv 0$。u_m 是与 (6.4.26) 中有相同初值 (f,g) 的方程 $\Box u_m=F_\kappa(u_{m-1})$ 的解, $m=0,1,2,\cdots$。则我们断言, 如果 $\varepsilon(\kappa)>0$ 足够小,

$$A_m=\|u_m-u_{m-1}\|_{L_t^{\frac{\kappa(\kappa-1)}{3-\kappa}} L_x^\kappa(\mathbb{R}_+^{1+3})} \leq 2^{-m}C_\kappa\varepsilon, 0<\varepsilon<\varepsilon(\kappa). \tag{6.4.30}$$

假设初值满足 (6.4.25) 和 C_κ 如 (3.6.66)。如果这是真的, 则 u_m 在 $L_t^{\frac{\kappa(\kappa-1)}{3-\kappa}} L_x^\kappa(\mathbb{R}_+^{1+3})$ 中必须收敛于 (6.4.26) 的弱解。如果 $m=0$, 由 (3.6.66), (6.4.30) 成立。这样我们设当 $m\geq 1$ 时, 对 $n<m$ 断言成立, 说明如果 $\varepsilon(\kappa)>0$, (6.4.30) 必成立。在这归纳假设下, 注意到我们必有

$$\|u_m\|_{L_t^{\frac{\kappa(\kappa-1)}{3-\kappa}} L_x^\kappa(\mathbb{R}_+^{1+3})} \leq 2C_\kappa\varepsilon,\ n<m. \tag{6.4.31}$$

为利用这一点, 用 Hölder 不等式和事实

$$F_\kappa(u_{m-1})-F_\kappa(u_{m-2})=O(|u_{m-1}|^{\kappa-1}+|u_{m-2}|^{\kappa-1})\cdot(|u_{m-1}-u_{m-2}|),$$

我们首先可利用 (6.4.28) 得到存在常数 $C_j, j=1,2$ 依赖于 κ, 使得

$$\begin{aligned} A_m &\leq C_1\|F_\kappa(u_{m-1})-F_\kappa(u_{m-2})\|_{L_t^{\frac{\kappa-1}{3-\kappa}} L_x^1(\mathbb{R}_+^{1+3})} \\ &\leq C_2\left(\|u_{m-1}\|^{\kappa-1}_{L_t^{\frac{\kappa(\kappa-1)}{3-\kappa}} L_x^\kappa(\mathbb{R}_+^{1+3})} + \|u_{m-2}\|^{\kappa-1}_{L_t^{\frac{\kappa(\kappa-1)}{3-\kappa}} L_x^\kappa(\mathbb{R}_+^{1+3})}\right)\cdot A_{m-1} \\ &\leq 2C_2(2C_k\varepsilon)^{\kappa-1}A_{m-1}. \end{aligned} \tag{6.4.32}$$

由 (6.4.32) 和归纳假设, 我们看到如果 $2C_2(2C_k\varepsilon(\kappa))^{\kappa-1}<1/2$, (6.4.30) 必成立, 这完成了当 $1+\sqrt{2}<\kappa<3$ 时的 定理 6.4.3 的证明。

为证另一半, 设 $2\leq\kappa<1+\sqrt{2}$, 令 $B_m=\|u_m-u_{m-1}\|_{L_t^{\kappa^2} L_x^\kappa([0,T_\varepsilon]\times\mathbb{R}^3)}$. 则我们断言, 如果 $\varepsilon(\kappa)>0$ 足够小, 如果 C_κ 如 (3.6.67), 则

$$B_m \leq C_\kappa\varepsilon T_\varepsilon^{\frac{1+2\kappa-\kappa^2}{\kappa^2}} 2^{-m}, 0<\varepsilon<\varepsilon(\kappa). \tag{6.4.33}$$

如前, 这意味着 u_m 收敛于方程的弱解。

由 (3.6.67) 我们得到 (6.4.33) 当 $m=0$ 时必须成立。因此, 让我们假设当 $m \geq 1$ 时对 $n < m$ 成立, 说明如果 ε 足够小 (6.4.33) 成立。然而, 如果用 (6.4.29) 和如上的讨论, 我们得到存在绝对常数 B 使得

$$B_m \leq B(2C_\kappa \varepsilon T_\varepsilon^{\frac{1+2\kappa-\kappa^2}{\kappa^2}})^{\kappa-1} B_{m-1} = B(2C_\kappa)^{\kappa-1} \varepsilon^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} B_{m-1}.$$

由于 $\kappa > 1$, 如果 $\varepsilon > 0$ 足够小, 由归纳假设得 (6.4.33)。

第七章　大振幅初值的半线性波动方程的整体解

这一章我们讨论没有小振幅限制的非线性波动方程解的整体存在性问题。与小振幅问题相对应，这时非线性函数在无穷远处的性态是重要的。我们将着重讨论一些特殊的模型方程，以便读者能看到所给方程的整体存在性对非线性函数以及初值的要求或联系。我们首先通过单参数半群表示及不动点理论讨论非线性函数满足一致 Lipschitz 条件的情形，然后在第二节讨论在慢于指数型增长性要求下的有限能量弱解，在第三节讨论有幂函数增长限制的情形。最后，我们将在第四节用高低频分解的方法讨论非线性波动方程的低正则整体弱解。

§7.1　具 Lipschitz 非线性的波动方程

我们考虑如下标准的模型方程

$$
\begin{aligned}
\Box u \quad &+ \quad f(u) = 0, \\
u(0,x) \quad &= \quad u_0,\ \partial_t u(0,x) = u_1,
\end{aligned}
\tag{7.1.1}
$$

其中 $f = F' \in C^0(\mathbb{R})$, u_0, u_1 充分光滑。

定理 7.1.1 *设 $f \in C^{0,1}(\mathbb{R})$, $(u_0,u_1) \in H^1_{loc} \times L^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$，则 Cauchy 问题 (7.1.1) 存在唯一解 u 满足 $\partial u \in C^0 L^2_{loc}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$。*

证明　对于任意的 $z_0 = (t_0, x_0)$ 我们只要在光锥 $K = K(z_0) = \{z = (t,x)|\ |x - x_0| < t_0 - t, t > 0\}$ 上构造解 u。不失一般性我们可以设 $x_0 = 0$。记 $D(t)$ 是锥 K 在 t 时刻的截断。令 $X = \{u \in C^0L^2(K), \partial u \in C^0L^2(K), (u,\partial_t u)|_{t=0} = (u_0,u_1)\}$，定义 $L: X \to X$ 如下：

$$
L(u)(t) = u^{(0)}(t) - \int_0^t W(t-s) * f(u(s))\mathrm{d}s,
$$

其中的 $W(t) = \mathcal{F}^{-1}(\sin|\xi|t/|\xi|)$，即 $\tilde{u} = L(u)$ 满足

$$
\Box\tilde{u} + f(u) = 0, \quad (\tilde{u}, \partial_t\tilde{u})|_{t=0} = (u_0,u_1).
$$

由能量估计我们有

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\partial(L(u)-L(v))\|_{L^2(D(t))} \quad \le \quad \|f(u)-f(v)\|_{L^2(D(t))}
$$

$$
\begin{aligned}
&\leq [f]_{C^{0,1}}\|u-v\|_{L^2(D(t))}\\
&\leq [f]_{C^{0,1}}\int_0^t \|\partial_t(u-v)\|_{L^2(D(t))}\mathrm{d}s\\
&\leq [f]_{C^{0,1}}t_0\|\partial(u-v)\|_{L^\infty L^2(K)}.
\end{aligned}
$$

关于 t 积分得

$$
\|\partial(L(u)-L(v))\|_{L^\infty L^2(K)} \leq [f]_{C^{0,1}}t_0^2\|\partial(u-v)\|_{L^\infty L^2(K)}.
$$

因此, 对于 $0<t_0^2<[f]_{C^{0,1}}^{-1}$, L 定义了一个 X 上的压缩映照。由于 X 是完备的, 由不动点定理存在唯一的 $u\in X$, 这样的解 $u\in C^0H^1(K)$。

注意到 t_0 的选取可以与初值无关。所以, 我们可以用可数多个高度为 t_0 的锥覆盖 $[0,t_0/2]\times\mathbb{R}^n$, 立刻就有满足 $(u_0,u_1)\in H^1_{loc}\times L^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$ 的 (7.1.1) 的解 $u\in C^0L^2_{loc}([0,t_0/2]\times\mathbb{R}^n)$。不断重复前面的讨论, 我们能以固定的跨度 $t_0>0$ 将这样的 u 延拓到无穷时间区间。

在方程两边关于空间变量微分, 用类似的讨论我们立刻就有

推论 7.1.1 对于 Cauchy 问题 (7.1.1), 如果初值 $(u_0,u_1)\in H^2_{loc}\times H^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, 则解 u 取值于 H^2_{loc} 且对任意的光锥 K, 我们有 $\partial^2u\in C^0L^2(K)$。

§7.2 半线性波动方程的有限能量弱解

本节讨论 Cauchy 问题 (7.1.1) 中方程的右端项 $f(u)$ 有如下性质的情形: 其原函数 $F(u)=\int_0^u f(\tau)\mathrm{d}\tau$ 满足

$$
F(u)\geq -C|u|^2, \tag{7.2.1}
$$

以及当 $|u|\to\infty$ 时

$$
\frac{|F(u)|}{|f(u)|}\to\infty. \tag{7.2.2}
$$

条件 (7.2.1) 保证了方程是焦散型的; 而 (7.2.2) 说的是在无限远处非线性函数 $f(u)$ 的强度要低于指数函数。

定理 7.2.1 设 (7.1.1) 中方程的非线性项满足 (7.2.1), (7.2.2), 则对于任何 $(u_0,u_1)\in H^1\times L^2(\mathbb{R}^n)$, $F(u_0)\in L^1(\mathbb{R}^n)$, Cauchy 问题 (7.1.1) 有一个整体弱解 u 满足 $\partial u\in L^\infty(\mathbb{R};L^2(\mathbb{R}^n))$ 且 $F(u)\in L^\infty(\mathbb{R};L^1(\mathbb{R}^n))$。此外, 对所有的 t 都有 $E(u(t))\leq E(u(0))<\infty$。

注 7.2.1 条件 (7.2.1) 和 (7.2.2) 可由

$$
uf(u)\geq 0 \tag{7.2.3}
$$

来取代。这个条件能保证 $F(u)\geq 0$, 但允许有任意快的增长性。这个问题的唯一性至今尚未解决。

在此我们仅对于 $f(u)=|u|^{\kappa-1}u$ 的模型方程 (7.1.1) 情形给出证明，一般情形可见 [58]。对于这样使得方程有正定能量的非线性方程整体弱解的证明主要基于能量不等式。此时我们设 $1\le\kappa<\infty$, $(u_0,u_1)\in H^1_{loc}\times L^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$ 满足 $u_0\in L^{\kappa+1}_{loc}$。我们要证明所给问题存在整体弱解 $u\in H^1_{loc}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$, 对于所有的 $z_0,t\ge 0$ 满足能量不等式

$$E(u(t);D(t;z_0))=\int_{D(t,z_0)}\left(\frac{|\partial u(t)|^2}{2}+\frac{|u(t)|^{\kappa+1}}{\kappa+1}\right)dx\le E(u(0);D(0;z_0)),$$

这里的 $D(t;z_0)$ 是 $K(z_0)$ 在 t 时刻的空向截断。对于这种纯指数非线性函数显然满足 $0\le uf(u)\le CF(u)$。为利用 定理 7.1.1, 我们选取 $f_k\in C^{0,1}$ 使得当 $k\to\infty$ 时 $f_k\to f$ 局部一致地成立。如可取 $f_k(u)=u\min\{k^{\kappa-2},|u|^{\kappa-2}\}$。

然后以这样的 f_k 为右端的方程 (7.2.1) 的解 u_k 作为一个逼近序列，易知 u_k 的能量是守恒的且当 $k\to\infty$ 时

$$E_k(u_k(t))=\int_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{|\partial u_k(t)|^2}{2}+F_k(u_k)\right)\mathrm{d}x=E_k(u_k(0))\to E_0.$$

这样，我们可以假设序列 $\{u_k\}$ 当 $k\to\infty$ 时 $\partial u_k\rightharpoonup\partial u$ 在 $L^\infty(\mathbb{R};L^2(\mathbb{R}^n))$ 弱 * 收敛; $u_k\to u$, $f_k(u_k)\to f(u)$ 几乎处处收敛。由 L^2 范数的下半连续性，以及 Fatou 定理，对于几乎所有的 t 有

$$E(u(t))\le\lim\inf_{k\to\infty}E_k(u_k(t))\le E_0.$$

特别地，$F(u)\in L^1_{loc}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$, 因而 $f(u)\in L^1_{loc}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$。

注意到 $0\le u_kf_k(u_k)\le CF_k(u_k)$ 在 $L^\infty(\mathbb{R};L^1(\mathbb{R}^n))$ 中一致有界。我们就有 $f_k(u_k)$ 在 $L^\infty L^{\frac{\kappa+1}{\kappa}}$ 中一致有界。这样 $f_k(u_k)$ 在 $L^\infty L^{\frac{\kappa+1}{\kappa}}$ 中弱 * 收敛。所以

$$0=\Box u_k+f(u_k)\to\Box u+f(u)$$

在 $\mathcal{D}'$ 中成立。

如果我们对非线性增长加以适当的限制，即可获得次临界情形的有限能量弱解的唯一性，可参见 Ginibre-Velo 的文章 [18]。

定理 7.2.2 *设方程 (7.1.1) 的右端 $f(u)\in C^1$ 满足 (7.2.1) 和对某个常数 $C>0$ 满足不等式*

$$|f'(u)|\le C(1+|u|^{\kappa-1}),\tag{7.2.4}$$

其中

$$1<\kappa<1+\frac{4}{n-2},\ \text{如果 } n=1,2,\text{则} 1<\kappa<\infty.\tag{7.2.5}$$

则 定理 7.2.1 的弱解是唯一的且 $u\in C(\mathbb{R};H^1)$ 满足能量等式 $E(u(t))=E(u(0))$。

满足条件 (7.2.5) 的模型情形，$f(u)=|u|^{\kappa-1}u$, 显然满足 定理 7.2.2 的条件，因而有唯一性。如果用能量方法我们不难证明当 $1\le\kappa\le 1+\frac{2}{n-2}$ 时模型方程解的唯一性。但要取得更好的定理 7.2.2 的结论需用 Strichartz 估计。下面的正则性结论是由 Brenner [4] 给出的。

定理 7.2.3 设 f 满足定理 7.2.2 的条件，如果初值在 $H^2 \times H^1$ 中，则 $u \in C(\mathbb{R}; H^2)$。

目前已经知道当 $n \leq 9$ 时，对于满足 (7.2.1), (7.2.4) 和 (7.2.5) 的 $f \in C^\infty$，具 C^∞ 初值的方程 (7.1.1) 有 C^∞ 解。在高维情形解的高正则性的困难是 $f(u)$ 的高阶导数，因为在 u 的导数中自然地带来了高指数。超临界情形的整体光滑解至今仍是最重要的公开问题。我们对以上定理的结论不给出证明，在下一节中我们将限制在三个空间维数的模型方程对于临界与次临界情形探讨其经典解的整体适定性问题。

§7.3　$\mathbb{R}^{1+3}$ 中半线性波动方程的经典整体解

我们将讨论 $\mathbb{R}^{1+3}_+$ 中的焦散型波动方程 $\Box u + |u|^{\kappa-1}u = 0$，其守恒的能量是

$$\int (\frac{1}{2}|\partial u|^2 + \frac{1}{\kappa+1}|u|^{\kappa+1})\mathrm{d}x.$$

依据"动能"项能否控制非线性势能项可将方程分成两类：即 $\kappa \leq 5$ 和 $\kappa > 5$。我们将研究包含次临界 $\kappa < 5$ 和临界 $\kappa = 5$ 的情形，对超临界 $\kappa > 5$ 的情形知道的并不多。使用混合范数估计 (3.6.26) 的特殊情形，我们将说明如果 Cauchy 初值是充分光滑的，上面的方程在次临界和临界情形均有经典整体解，以至于有适定的有限能量解。由于这时标尺度平衡起作用，这些混合范数估计与能量恒等式对次临界情形都是需要的。对临界情形，我们将需要基于 Morawetz-Pohozaev 恒等式的局部能量讨论。

一般说来，对于次临界的方程，高频呈现的是几乎线性的性态，留下仅仅是低频展现真正的非线性性态，这使得局部和整体理论相对直接可得，局部理论通常可由标准的扰动理论得到，而整体存在性往往来自于守恒律。对于临界方程，在线性和非线性部分之间存在着一种脆弱的平衡。尽管非线性部分在某种意义下，当能量是有限时能通过一个常数因子被线性部分来控制，但不难相信不论在高频还是低频，短时间还是长时间均能展现非线性性态。这对局部和整体的理论研究带来新的困难。其中的多数原因是由于临界的特征，往往会要求我们在标尺度平衡的空间里工作，这会限制我们的工具。例如，我们不能有效地关于时间使用 Hölder 不等式来获得一个依赖于时间长度的量，这样局部理论的存在时间将依赖于初值本身的一个剖面，而不只是其范数。正因为如此，仅由能量守恒将局部适定性转化成整体适定性是不够的。解的能量能在有限时间集中于一点，这能导致局部解的不存在性。研究临界方程，标尺度变换不变的特征总是要在解中得到体现，在研究这类问题的关键是要弄清解的高频分量和低频分量之间的干扰。目前已发展了不少方法，如双线性 Strichartz 估计、单调性公式、几乎守恒律等。在应用这些工具时，对于大能量解所带来的较大的困难是在不同的频率范围均将有可观的能量，这会导致不同标尺之间的干扰非常复杂。然而，Bourgain 的能量归纳法，允许我们将注意力集中在"极小能量破裂解"。与椭圆情形的基态解相似，我们可将这样的解转化成局部化的空间和频率的范围内来讨论，使得上面的工具的应用更为容易。

对于我们所考虑的临界波动方程的大初值问题，由于没有初始能量的小性条件和解的 L^∞_t 的衰减性，一般说来，用 L^∞ 模来判别破裂性比较适用于经典解情形，它是

一种全空间整体的判别，并不适合于低正则情形。为此，我们将发展一种适用于临界情形的解的破裂性判别准则。在临界情形我们往往需要某种基于标尺度不变的扰动理论（如基于 Strichartz 估计）和有限传播速度的性质来得到某种估计（如 $L_t^q L_x^r, q < \infty$），使得解在时空局部化情形下有适当的小性，或说明能量不集中。这样，我们就可以利用扰动理论将解延拓。在此我们虽然讨论的是经典解，但可延拓至有限能量解。

7.3.1 主要结果

我们考虑

$$\begin{cases} \Box u = -\phi_\kappa(u), \\ u(0,x) = f(x) \in C^3(\mathbb{R}^3), \partial_t u(0,x) = g(x) \in C^2(\mathbb{R}^3). \end{cases} \tag{7.3.1}$$

为简单，我们仅考虑实解，将假设初始函数是实值的。

我们已知如果 $\phi_\kappa \in C^2(\mathbb{R})$, $\phi_\kappa(0) = 0$, 且初值有紧支集，则 (7.3.1) 有一个局部 C^2 解。

由第五章所介绍的 F. John 的破裂解的结果知，我们如果想要保证 (7.3.1) 总有一个整体解，就需要附加一些条件到非线性项上，第一个条件是 ϕ_κ 和其一阶导数在无穷远处的增长性限制，这种限制通常是用幂函数来刻画的。即对于 $\kappa > 1$, 成立

$$|\phi_\kappa(u)| + |u\phi_\kappa'(u)| \leq C(1+|u|)^\kappa. \tag{7.3.2}$$

如前面我们看到的，这个条件是不够的，由于如果设 $-\phi_\kappa(u) = |u|^\kappa$, (7.3.1) 的解能破裂, 为排除这种情形我们要在 ϕ_κ 的原函数的符号上加一个条件。具体地，如果

$$\Phi_\kappa(u) = \int_0^u \phi_\kappa(\tau)\mathrm{d}\tau,$$

则我们将假设

$$\Phi_\kappa(u) \geq 0, \tag{7.3.3}$$

且此外还设

$$|u|^{\kappa+1} \leq C_0(1 + \Phi_\kappa(u)). \tag{7.3.4}$$

对临界情形，我们还将要附加一个假设，即，对于 $\kappa = 5$, 当 $|u|$ 适当大以后有

$$u\phi_\kappa(u) - 4\Phi_\kappa(u) \geq 0. \tag{7.3.5}$$

这个条件对 $\phi_\kappa = u^5$ 的模型显然满足，但在次临界情形不需此条件，注意到如果 $\phi_\kappa = |u|^{\kappa-1}u$, 则 (7.3.5) 成立当且仅当 $\kappa \geq 3$(超共形)。

不难看到 (7.3.2) 意味着 (7.3.4) 的逆不等式本质上是成立的，即

$$\Phi_\kappa(u) \leq C(1+|u|)^{\kappa+1}. \tag{7.3.6}$$

这样，若 u 是 $[0,T]\times\mathbb{R}^3$ 中具紧支集初值的方程 (7.3.1) 的 C^2 解，则与之相关的能量

$$E(u;t)=\int_{\mathbb{R}^3}(\frac{1}{2}|\partial u(t,x)|^2+\Phi_\kappa(u))\mathrm{d}x \tag{7.3.7}$$

在时间区间 $0\le t\le T$ 上是常数。注意到能量包括两项，一项是线性自由能量，可理解为动能，另一项是非线性势能 $\Phi_\kappa(u)$。为保证非线性势能可由“动能”控制，注意到在 $\mathbb{R}^3$ 中的 Sobolev 嵌入是说梯度在 L^2 中的函数仅当 $q\le 6$ 时在 L^q_{loc} 中，由 (7.3.6) 和 (7.3.7)，我们需要 $\kappa\le 5$。这样，$\Phi_\kappa(u)$ 的性态像 $|u|^{\kappa+1}$ 且要求 $\kappa+1\le 6$，即 $\kappa\le 5$。至于称 $\kappa=5$ 是临界情形是由于 $\kappa+1=6$ 是 Sobolev 嵌入的临界指数，或关于能量空间是临界的，因而 $1<\kappa<5$ 自然是次临界情形。

下面的结果是我们的主要定理。

定理 7.3.1 设 $1<\kappa\le 5$，ϕ_κ 是满足 (7.3.2)-(7.3.4)，且如果 $\kappa=5$ 当 $|u|$ 大时 (7.3.5) 满足。则 (7.3.1) 总有一个整体解 $u\in C^2(\mathbb{R}^{1+3}_+)$。此外，如果我们再假设 ϕ_κ 和 Cauchy 初值是 C^∞ 的，则 $u\in C^\infty(\mathbb{R}^{1+3}_+)$。

定理的次临界部分是由 Jörgens [23] 在 1961 年证明的。临界情形 $\kappa=5$ 是由 Grillakis [20] 在 30 年以后解决的。他的工作来自于早些时候 Rauch [50] 对小能量初值和 Struwe [59] 处理球面对称情形的方法。

注 7.3.1 上面的方程包括模型方程 $\Box u=-u^5$。在上一章我们看到，如果我们考虑聚焦型方程 $\Box u=u^5$，则我们已经知道即使对光滑紧支集初值也会破裂。如果允许初值没有紧性，我们有如下例子：

$$u(t,x)=(3/4)^{1/4}(1-t)^{-1/2},$$

在 $[0,1)\times\mathbb{R}^3$ 中解 $\Box u=u^5$，当然当 $t\nearrow 1$ 时破裂。

定理中关于 C^∞ 解的结论可以用局部存在性定理从弱一些的 C^2 解得到，因此我们仅需证明第一部分。

在接下来的证明整体存在性结论中，我们仅需考虑紧支集初值情形，这样能简化我们下面对能量的讨论。为看到这一点，我们可用简单的逼近来讨论。具体的说，固定 $\chi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ 使得当 $|x|\le 1$ 时，$\chi=1$。令 $f_R=\chi(x/R)f(x), g_R=\chi(x/R)g(x)$。如果我们假设 定理 7.3.1 对紧支集初值成立，且令 u_R 是 (7.3.1) 以 (f_R,g_R) 为初值的一个解，我们断言，当 $R\to\infty$ 时，u_R 在 $C^2(\mathbb{R}^{1+3}_+)$ 中收敛于 (7.3.1) 以 (f,g) 为初值的解。为此，对于 $t_0\in\mathbb{R}_+$，用

$$\wedge_{t_0,0}=\{(t,x):0\le t\le t_0,|x|\le t_0-t\}$$

记过 $(t_0,0)$ 的后向光锥。则由唯一性定理，如果 $R_1,R_2>t_0$，由于 u_{R_1} 和 u_{R_2} 在 $\wedge_{t_0,0}\cap\{(0,x):x\in\mathbb{R}^3\}$ 中有相同的 Cauchy 初值 (f,g)，在 $\wedge_{t_0,0}$ 中我们必有 $u_{R_1}=u_{R_2}$ 成立。这样，由于 $\mathbb{R}^{1+3}_+=\cup_{t_0>0}\wedge_{t_0,0}$，$u_R$，必收敛于 (7.3.1) 的一个解。

当我们在研究临界情形时，我们需要像 (3.6.26) 那样的 Pecher 不等式。具体地说，如果 $v\in C^1$ 是

$$\begin{cases}\Box v(t,x)=F(t,x), & (t,x)\in\mathbb{R}^{1+3}_+,\\ v(0,x)=f(x), & \partial_t v(0,x)=g(x),\end{cases}$$

的一个 (弱) 解, 则我们要求满足不等式

$$\|v\|_{L_t^4 L_x^{12}(S_T)} \le C(\|\partial v(0,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \|F\|_{L_t^1 L_x^2(S_T)}), \tag{7.3.8}$$

其中 $S_T = [0,T]\times\mathbb{R}^3, T>0$,

$$\sup_{0\le t\le T}\|v(t,\cdot)\|_{L^6(\mathbb{R}^3)} \le C(\|\partial v(0,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \|F\|_{L_t^1 L_x^2(S_T)}). \tag{7.3.9}$$

第二个不等式来自于波动方程的能量不等式, 这是由于 Sobolev 定理意味着左边可由 $\sup_{0\le t\le T}\|\partial v(t,\cdot)\|_{L^2}$ 来控制。不等式 (7.3.8) 是 (3.6.26) 的直接推论。

由局部存在性定理, 如果 u 是具紧支集初值的 Cauchy 问题 (7.3.1) 在 $[0,T_*)\times\mathbb{R}^3$ 的一个 C^2 解, 则或 u 可以延拓到一个更大的带形区域的 C^2 解, 或破裂, 即 $u\notin L^\infty([0,T_*)\times\mathbb{R}^3)$。下面的命题说明即使 (7.3.4) 不满足, 我们也能用 (7.3.8) 的混合范数来取代 L^∞ 范数。

命题 7.3.1 *设 $1<\kappa\le 5, \phi_\kappa\in C^2$ 满足 (7.3.2)。则如果 $f\in C^3, g\in C^2$ 是给定的具有紧支集的函数, 存在一个 $T>0$, 使得 (7.3.1) 有一个解 $u\in C^2([0,T]\times\mathbb{R}^3)$。此外, 如果 T_* 是所有这样时间的上确界, 则或 $T_*=+\infty$ 或 $u\notin L_t^4L_x^{12}([0,T_*)\times\mathbb{R}^3)$。*

证明 定理的第一部分来自于局部存在性定理。为证第二部分, 设 $0<T_*<\infty, u$ 是 $[0,T_*)\times\mathbb{R}^3$ 中满足

$$u\in L_t^4L_x^{12}([0,T_*)\times\mathbb{R}^3) \tag{7.3.10}$$

的 (7.3.1) 的 C^2 解, 我们必须说明 u 可以延拓到闭带形区域 $[0,T_*]\times\mathbb{R}^3$ 上的一个 C^2 解, 从而导致矛盾。我们的任务是等价于说明 (7.3.10) 意味着

$$u\in L^\infty([0,T_*)\times\mathbb{R}^3). \tag{7.3.11}$$

假设 $u\in C^2([0,T_*)\times\mathbb{R}^3)$ 是 (7.3.1) 满足当 $|x|>R$ 时为 0 的初始条件的解。其中的 $0<R<\infty$ 可足够大。由唯一性定理, 当 $|x|>R+t$ 时 $u(t,x)=0$。因此, 如果 $0\le t_0<s<T_*$, 假设 (7.3.2) 意味着

$$\|\partial_x^\alpha(\phi_\kappa(u))\|_{L_t^1L_x^2([t_0,s]\times\mathbb{R}^3)} \le C + C\||u|^{\kappa-1}\partial_x^\alpha u\|_{L_t^1L_x^2([t_0,s]\times\mathbb{R}^3)}, |\alpha|=0,1, \tag{7.3.12}$$

其中常数能取成依赖于 R, T_* 和 (7.3.2) 中的常数, 但不依赖于 t_0 和 s。

通过应用由 $t-t_0$ 取代 t 的不等式 (7.3.9), 我们可得

$$\begin{aligned}
&\sup_{t_0\le t\le s}\sum_{|\alpha|\le 1}\|\partial_x^\alpha u(t,\cdot)\|_{L^6(\mathbb{R}^3)}\\
\le\ & C\left(1+\sum_{|\alpha|\le 1}\left(\|\partial(\partial_x^\alpha u)(t_0,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \||u|^{\kappa-1}\partial_x^\alpha u\|_{L_t^1L_x^2([t_0,s]\times\mathbb{R}^3)}\right)\right)\\
\le\ & C(t_0) + C\sum_{|\alpha|\le 1}\||u|^{\kappa-1}\partial_x^\alpha u\|_{L_t^1L_x^2([t_0,s]\times\mathbb{R}^3)},
\end{aligned} \tag{7.3.13}$$

这里的 $C(t_0)$ 与 s 无关且有限, 这是由于 $u(t_0,x)\in C^2$ 且对大的 $|x|$ 为 0。

为了处理最后一项，我们注意到由假设 (7.3.10) 可知，当 $t_0 \nearrow T_*$ 时 $\|u\|_{L_t^4 L_x^{12}([t_0,s]\times\mathbb{R}^3)}$ 必趋于 0。希望能将这一项分解成我们所需的相关因子，首先考虑 $\kappa=5$，则我们能应用 Hölder 不等式看到在 (7.3.13) 中的最后一项是

$$\begin{aligned}&\le C\sup_{t_0\le t\le s}\sum_{|\alpha|\le 1}\|\partial_x^\alpha u(t,\cdot)\|_{L^6(\mathbb{R}^3)}\||u|^4\|_{L_t^1 L_x^{\frac{3}{2}}([t_0,s]\times\mathbb{R}^3)}\\&\le C\sup_{t_0\le t\le s}\sum_{|\alpha|\le 1}\|\partial_x^\alpha u(t,\cdot)\|_{L^6(\mathbb{R}^3)}\|u\|^4_{L_t^4 L_x^{12}([t_0,s]\times\mathbb{R}^3)}.\end{aligned}$$

因此，对 t_0 充分接近于 T_*，我们得到在 (7.3.13) 中的最后一项是比左边的一半小，这样

$$\sup_{t_0\le t\le s}\sum_{|\alpha|\le 1}\|\partial_x^\alpha u(t,\cdot)\|_{L^6(\mathbb{R}^3)}<2C(t_0). \tag{7.3.14}$$

如果我们令 $s\nearrow T_*$，得

$$\sup_{t_0\le t\le T_*}\sum_{|\alpha|\le 1}\|\partial_x^\alpha u(t,\cdot)\|_{L^6(\mathbb{R}^3)}<\infty. \tag{7.3.15}$$

显然，由 Sobolev 定理，这意味着 (7.3.11)。这样，就得到了当 $\kappa=5$ 时的临界情形。

次临界的情形的处理类似的。如果用上面的 Hölder 不等式我们看到，对于 $1<\kappa<5$，(7.3.13) 中的最后一项必是

$$\le C\sup_{t_0\le t\le s}\sum_{|\alpha|\le 1}\|\partial_x^\alpha u(t,\cdot)\|_{L^6(\mathbb{R}^3)}\|u\|^{\kappa-1}_{L_t^{\kappa-1}L_x^{3(\kappa-1)}([t_0,s]\times\mathbb{R}^3)}.$$

注意到 $\kappa-1<4$ 和 $3(\kappa-1)<12$。因此，如果我们回顾 u 的支集性质，我们就能再次用 Hölder 不等式得到存在一个常数 C_{R,T_*}，使得最后的因子是

$$\le C_{R,T_*}\|u\|^{\kappa-1}_{L_t^4 L_x^{12}([t_0,s]\times\mathbb{R}^3)}.$$

由于 $\kappa>1$，这一项当 $t_0\nearrow T_*$ 时也趋于 0。因此我们能重复应用在临界情形的讨论看到如果 t_0 充分接近 T_*，(7.3.14) 必然成立。由于这意味着 (7.3.15)，因此对这个范围的 κ，(7.3.11) 也成立。

有了这个命题，在证 定理 7.3.1 时，我们可以假设 u 如上，且只要说明 (7.3.10) 成立。当然，我们要用 $L_t^4L_x^{12}$- 估计 (7.3.8)。在证明中我们需要看到定义在 (7.3.7) 中的能量是守恒的，具体的处理将放在下一小节。那里我们将看到为完成次临界情形的证明，这两个工具都是需要的。然而在临界情形的讨论更为细致，我们将在第三小节中处理。对于这种情形我们将还需要基于 Morawetz 恒等式的局部能量估计。

7.3.2　能量估计和次临界情形

在下一步的整体存在性定理的证明中将看到由 (7.3.7) 定义的能量是守恒的。更具体地，我们有下面的命题：

命题 7.3.2 设 ϕ_κ 如同 定理 *7.3.1*, 也设 $0 < T_* < \infty, u \in C^2([0,T_*) \times \mathbb{R}^3)$ 是以当 $|x| > R$ 时取零值的初始条件的 Cauchy 问题 (7.3.1) 的解, 则

$$E(u;t) = \int_{\mathbb{R}^3} (\frac{1}{2}|\partial u(t,x)|^2 + \Phi_\kappa(u(t,x)))\mathrm{d}x = E(u;0), 0 < t < T_*. \tag{7.3.16}$$

此外, 对如上所给的初始条件, 存在一个常数 C_{R,T_*} 使得

$$\int_{\mathbb{R}^3} (|\partial u(t,x)|^2 + |u(t,x)|^{\kappa+1})\mathrm{d}x \le C_{R,T_*}, 0 < t < T_*. \tag{7.3.17}$$

证明 注意到：如果 $|x| > t + R, u(t,x) = 0$, 则由于 (7.3.4) 成立, (7.3.16) 意味着 (7.3.17)。再注意到, 由对初始条件的假设, 有

$$E(u;0) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{2}\left(|\partial_x f(x)|^2 + |g(x)|^2\right) + \Phi_\kappa(f(x)))\mathrm{d}x < \infty,$$

(7.3.16) 的证明只是第三章关于能量讨论的一个简单的变形。事实上, 如果我们用 $\partial_t u$ 乘方程 $\Box u + \phi_\kappa(u) = 0$ 两边, 则可得

$$0 = \partial_t u(\Box u + \phi_\kappa(u)) = \mathrm{div}_{t,x} e(u), \tag{7.3.18}$$

其中的

$$e(u) = (\frac{1}{2}|\partial u|^2 + \Phi_\kappa(u), -\partial_t u \nabla_x u), \tag{7.3.19}$$

如果我们固定 $0 < t < T_*$, 则在 $[0,t] \times \mathbb{R}^3$ 中 $u \in C^2$ 且有紧支集。因此积分 (7.3.18) 得到

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{div}_{\tau,x} e(u)\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \int_0^t \frac{\partial}{\partial \tau}(\frac{1}{2}|\partial u|^2 + \Phi_\kappa(u))\mathrm{d}\tau\mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{1}{2}|\partial u(t,x)|^2 + \Phi_\kappa\left(u(t,x)\right)\right)\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{1}{2}|\partial u(0,x)|^2 + \Phi_\kappa\left(u(0,x)\right)\right)\mathrm{d}x, \end{aligned}$$

这给出 (7.3.16)。

我们几乎已经完成了对次临界情形的整体存在性的证明。为完成证明, 首先我们必须证明下面的简单的引理, 这也能用来处理临界情形。

引理 7.3.1 设 $0 < C_0 < \infty, 0 \le y(s) \in C([a,b))$, 满足 $y(a) = 0$ 和对某 $\sigma > 0$ 满足

$$y(s) \le C_0 + \varepsilon y(s)^\sigma,$$

则如果 $\varepsilon < 2^{-\sigma} C_0^{1-\sigma}$, 有

$$y(s) \le 2C_0, s \in [a,b).$$

证明　显然，$\{s \in [a,b)|y(s) \le 2C_0\}$ 是非空的闭集。为说明这是一个开集，从而结论成立，我们设 $y(s) \le 2(1+\delta)C_0$，其中的 $\delta > 0$ 充分小，我们就可从条件得到 $y(s) \le 2C_0$，结合连续性我们即知这是开集，则引理得证。

次临界证明的结束　我们不妨假设 (7.3.1) 中的 Cauchy 初值对 $|x| > R$ 时为 0。于是我们需要说明如果 $0 < T_* < \infty$，且 $u \in C^2([0,T_*) \times \mathbb{R}^3)$，则

$$u \in L_t^4 L_x^{12}([0,T_*) \times \mathbb{R}^3). \tag{7.3.20}$$

设 $0 \le t_0 < s < T_*$，由 (7.3.8)、(7.3.12) 以及能量的守恒性，我们可以找到一个只依赖于 T_* 和 R 常数 C，使得

$$\begin{aligned}\|u\|_{L_t^4 L_x^{12}([t_0,s]\times\mathbb{R}^3)} &\le C(1 + \|\partial u(t_0,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \||u|^\kappa\|_{L_t^1 L_x^2([t_0,s]\times\mathbb{R}^3)}) \\ &\le C(1+(2E(u;0))^{1/2}) + C\||u|^\kappa\|_{L_t^1 L_x^2([t_0,s]\times\mathbb{R}^3)}\end{aligned} \tag{7.3.21}$$

为处理最后一项，注意到

$$1 = \frac{5-\kappa}{4} + \frac{\kappa-1}{4}, \text{和} \frac{1}{2} = \frac{7-\kappa}{12} + \frac{\kappa-1}{12}.$$

因此，如果我们将 $|u|^\kappa$ 写成 $|u|^{\kappa-1}|u|$，由 Hölder 不等式得

$$\begin{aligned}\||u|^\kappa\|_{L_t^1 L_x^2([t_0,s]\times\mathbb{R}^3)} &\le \|u\|_{L_t^{\frac{4}{5-\kappa}} L^{\frac{12}{7-\kappa}}([t_0,s]\times\mathbb{R}^3)} \cdot \||u|^{\kappa-1}\|_{L_t^{\frac{4}{\kappa-1}} L^{\frac{12}{\kappa-1}}([t_0,s]\times\mathbb{R}^3)} \\ &= \|u\|_{L_t^{\frac{4}{5-\kappa}} L^{\frac{12}{7-\kappa}}([t_0,s]\times\mathbb{R}^3)} \cdot \|u\|^{\kappa-1}_{L_t^4 L^{12}([t_0,s]\times\mathbb{R}^3)}.\end{aligned} \tag{7.3.22}$$

注意到当 $|x| \ge t+R$ 时 $u(t,x) = 0$，由 Hölder 不等式，$\frac{12}{7-\kappa} < \kappa+1$，$1 < \kappa < 5$，以及 (7.3.17) 我们得

$$\begin{aligned}\|u\|_{L_t^{\frac{4}{5-\kappa}} L^{\frac{12}{7-\kappa}}([t_0,s]\times\mathbb{R}^3)} &\le (T_* - t_0)^{\frac{5-\kappa}{4}} \sup_{t_0 \le t \le s} \|u(t,\cdot)\|_{L^{\frac{12}{7-\kappa}}(\mathbb{R}^3)} \\ &\le C(T_* - t_0)^{\frac{5-\kappa}{4}} (T_* + R)^{3(\frac{7-\kappa}{12} - \frac{1}{\kappa+1})} \sup_{t_0 \le t \le s} \|u\|_{L^{\kappa+1}(\mathbb{R}^3)} \\ &\le CC_{R,T_*}(T_* - t_0)^{\frac{5-\kappa}{4}}.\end{aligned} \tag{7.3.23}$$

设

$$\varepsilon(t_0) = CC_{R,T_*}(T_* - t_0)^{\frac{5-\kappa}{4}},$$

其中 C 如同 (7.3.21)，则 (7.3.21)-(7.3.23) 给出

$$\|u\|_{L_t^4 L_x^{12}([t_0,s]\times\mathbb{R}^3)} \le C(1 + (2E(u;0))^{1/2}) + \varepsilon(t_0)\|u\|^{\kappa-1}_{L_t^4 L_x^{12}([t_0,s]\times\mathbb{R}^3)}. \tag{7.3.24}$$

由于 $\kappa < 5$，以及当 $t_0 \nearrow T_*$ 时 $\varepsilon \to 0$。因此，引理 7.3.1 意味着，如果 t_0 充分接近于 T_*，则

$$\|u\|_{L_t^4 L_x^{12}([t_0,s]\times\mathbb{R}^3)} \le 2C(1 + (2E(u;0))^{1/2}),\ t_0 \le s < T_*, \tag{7.3.25}$$

由于在 $[0,t_0] \times \mathbb{R}^3$ 中，u 是有界的且具有紧支集，这就给出了 (7.3.20)。

7.3.3 衰减引理和临界情形

设 u 如同 命题 7.3.2, 为证临界情形的局部存在性我们需要能量等式的一个局部方式。固定 $x_0 \in \mathbb{R}^3$, 则对 $0 \leq t_0 < s < T_*$ 和 $\delta \geq 0$, 令

$$\wedge(\delta; t_0, s) = \{(t,x) : t_0 \leq t \leq s, |x - x_0| \leq \delta + T_* - t\} \tag{7.3.26}$$

是过 $(T_* + \delta, x_0)$ 的后向光锥的一部分, 则在较大底部的有界球

$$D_{t_0} = \{(t,x) \in \wedge(\delta; t_0, s) : t = t_0\}$$

中的能量等于较小顶部有界球

$$D_s = \{(t,x) \in \wedge(\delta; t_0, s) : t = s\}$$

中的能量, 加上穿过边界的其余部分

$$M_{t_0}^s = \{(t,x) \in \wedge(\delta, t_0, s) : t_0 \leq t \leq s, |x - x_0| = \delta + T_* - t\}$$

的能量流。更具体地, 令

$$E(u; D_t) = \int_{D_t} (1/2|\partial u(t,x)|^2 + \Phi_\kappa(u(t,x))\mathrm{d}x,\ 0 \leq t < T_*, \tag{7.3.27}$$

$$\mathrm{Flux}(u; M_{t_0}^s) = \int_{M_{t_0}^s} \langle e(u), \vec{\nu}\rangle \mathrm{d}\sigma,\ 0 \leq t_0 < s \leq T_*. \tag{7.3.28}$$

其中 $e(u)$ 如同 (7.3.19), $\vec{\nu}$ 是 M_t^s 上给定点的外法向, $\mathrm{d}\sigma$ 记在这个集上的 Lebesgue 测度。则我们断言, 对于 $0 \leq t_0 < s < T_*$, 有

$$E(u; D_{t_0}) = E(u; D_s) + \mathrm{Flux}(u; M_{t_0}^s). \tag{7.3.29}$$

这个公式的证明类似于对 (7.3.16) 的证明, 先在 $\wedge(\delta; t_0, s)$ 上积分 $\mathrm{div}_{t,x} e(u)$, 然后用一个散度定理得到 (7.3.29)。

下面的事情是要说明我们的假设 $\Phi_\kappa(u) \geq 0$ 意味着能量流量是非负的。事实上, 我们注意到 $M_{t_0}^s$ 是形如 $(\delta + T_* - |x|, x_0 - x)$ 且满足 $\delta + T_* - |x| \in [t_0, s]$ 的点组成的。在这样的一点, 外法向是 $(1, \frac{-x}{|x|})/\sqrt{2}$, 这样

$$\begin{aligned} \sqrt{2}\langle e(u), \vec{\nu}\rangle &= \frac{1}{2}|\partial u|^2 + \Phi_\kappa(u) - \partial_t u \frac{x}{|x|} \cdot \nabla_x u \\ &= \frac{1}{2}|\frac{x}{|x|}\partial_t u - \nabla_x u|^2 + \Phi_\kappa(u) \geq 0. \end{aligned} \tag{7.3.30}$$

由于 Flux ≥ 0, 从 (7.3.29) 我们知道 $t \to E(u; D_t)$ 是 $[0, T_*)$ 上的一个非增函数。由于我们关于初值的假设, 有 $E(u; D_t) \leq E(u; t) = E(u; 0) < \infty$。因此 (7.3.29) 中的前两项必趋于一个公共的极限。这就给出了一个重要的事实。

$$当 t \to T_* 时, \mathrm{Flux}(u; M_t^{T^*}) \to 0.$$

用 $E(u, D_t)$ 的单调性, 我们能修改 命题 7.3.2 的证明得到下述结果:

命题 7.3.3 设 $\kappa=5$, 假设 $u\in C^2([0,T_*)\times\mathbb{R}^3)$ 是以当 $|x|>R$ 时为 0 的初值之 (7.3.1) 的解, 固定 $x_0\in\mathbb{R}^3$, 设

$$\int_{|x-x_0|\le T_*-t_0}(\frac{1}{2}|\partial u(t_0,x)|^2+\Phi_\kappa(u(t_0,x)))\mathrm{d}x<\varepsilon, \tag{7.3.31}$$

则存在一个仅依赖于 T_*,R 和 $E(u;0)$ 的 $\varepsilon_0>0$, 若 $0<\varepsilon<\varepsilon_0$ $0\le t_0<T_*$, 对于 $\delta>0,T_*-t_0$ 充分小有

$$u\in L_t^4L_x^{12}(\wedge(\delta;t_0,T_*)). \tag{7.3.32}$$

我们仅需对接近于 T_* 的 t_0 作出证明, 一旦我们说明 (7.3.32) 成立, 对于同样的 δ, 注意到 $u\in C^2([0,T_*)\times\mathbb{R}^3)$ 且当 $|x|$ 大时为 0, 我们能用 0 来取代 t_0。

证明 设 C_0 是 (7.3.4) 中的常数。第一步是看如果 (7.3.31) 对一个给定 $\varepsilon>0$ 成立, (7.3.31) 和我们对 Φ_5 关于下界的假设 (7.3.4), 假如 $\delta>0$ 以及 T_*-t_0 均充分小, 这就意味着

$$\sup_{t_0\le t<T_*}\int_{|x-x_0|\le\delta+T_*-t}|u(t,x)|^6\mathrm{d}x<2C_0\varepsilon. \tag{7.3.33}$$

为看到这一点, 我们首先注意到, 如果我们用一个大区域 $|x-x_0|<\delta+T_*-t_0$ 上的积分来取代 (7.3.31) 中的积分, 则如果 δ 足够小, 所得的结果一定比 $3\varepsilon/2$ 小。由于 $E(u;D_t)$ 是 t 的一个非增函数, 我们也必有

$$\sup_{t_0\le t<T_*}\int_{|x-x_0|\le\delta+T_*-t}(\frac{1}{2}|\partial u(t,x)|^2+\Phi_\kappa(u(t,x)))\mathrm{d}x<\frac{3\varepsilon}{2}.$$

最后, 如果 C_0 是 (7.3.4) 中的常数, 且 $t_0\le t<T_*$, 则

$$\begin{aligned}&\int_{|x-x_0|\le\delta+T_*-t}|u(t,x)|^6\mathrm{d}x\\ \le\ &\frac{4\pi}{3}C_0(\delta+T_*-t_0)^3+C_0\int_{|x-x_0|\le\delta+T_*-t}\Phi_\kappa(u(t,x))\mathrm{d}x\\ \le\ &\frac{4\pi}{3}C_0(\delta+T_*-t_0)^3+\frac{3}{2}C_0\varepsilon,\end{aligned}$$

这样, 如果 δ 和 t_0 选成使得 $4\pi(\delta+T_*-t_0)^3/3<\varepsilon/2$, (7.3.33) 必然成立。用 (7.3.33) 我们能修改 命题 7.3.1 的证明得到: 如果 ε 足够小 (7.3.32) 必须成立。对于 $v=u,F=-\phi_\kappa(u)$, 我们将要用 (7.3.8)。如果 $t_0<s<T_*$ 以及左边的范数仅取在 $\wedge(\delta;t_0,s)$ 上, 则由 Huygen's 原理, 包含 F 的范数仅需要取在同样的集上。这样, 由总能量的守恒, 我们得

$$\begin{aligned}\|u\|_{L_t^4L_x^{12}(\wedge(\delta;t_0,s))}&\le C\|\partial u(t_0,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}+C\|\phi_\kappa(u)\|_{L_t^1L_x^2(\wedge(\delta;t_0,s))}\\&\le C(2E(u;0))^{1/2}+C\|\phi_\kappa(u)\|_{L_t^1L_x^2(\wedge(\delta;t_0,s))}.\end{aligned} \tag{7.3.34}$$

如果我们用 (7.3.2) 的一个变形及 Hölder 不等式, 可得存在一个常数 C_1 仅依赖于 T_* 和 R 使得

$$\|\phi_\kappa(u)\|_{L_t^1L_x^2(\wedge(\delta;t_0,s))}\le C_1+C_1\||u|^4u\|_{L_t^1L_x^2(\wedge(\delta;t_0,s))}$$

为证实这一点，我们只要注意到如果 t_0 接近于 T_*, (7.3.35) 意味着对一个给定的 $\varepsilon > 0$, (7.3.31) 总成立。因此，对于每个固定的 $x_0 \in \mathbb{R}^3$，一定存在一个 $\delta > 0$ 使得 (7.3.32) 成立。正如我们指出过的，由于 $u(t,x)$ 在 $[0,t_0] \times \mathbb{R}^3$ 上有界，(7.3.32) 能加强到 $u \in L_t^4 L_x^{12}(\wedge(\delta;0,T_*))$。$u(t,x)$ 在 $[0,T_*) \times \mathbb{R}$ 的一个相对紧支集外为 0，我们能用有限多个这些集 $\wedge(\delta;0,T_*)$ 覆盖它的支集。因此，$u \in L_t^4 L_x^{12}([0,T_*) \times \mathbb{R}^3)$，由 命题 7.3.1，这意味着 u 能延拓到一个整体 C^2 解。

显然，如果 u 能延拓到 $[0,T_*] \times \mathbb{R}^3$ 上的一个 C^2 函数，(7.3.35) 一定成立。这样，我们已经把说明这样一个延拓总存在转化到证明有关能量不集中的更弱的叙述。下一步我们再讲问题转化为仅要说明来自于非线性势函数部分的能量不能集中。

命题 7.3.4 设 $\kappa = 5$, u 如上，则如果

$$\lim_{t \nearrow T_*} \int_{|x-x_0|<T_*-t} \Phi_\kappa(u(t,x))\mathrm{d}x = 0, \tag{7.3.36}$$

(7.3.35) 必成立。

证明 我们必须说明动能不能集中，如果用 $\Phi_\kappa(u)$ 的下界 (7.3.4)，我们看到 (7.3.36) 等价于

$$\lim_{t \nearrow T_*} \int_{|x-x_0|<T_*-t} |u(t,x)|^6 \mathrm{d}x = 0.$$

命题 7.3.3 的证明说明这意味着，对于过 (T_*, x_0) 的后向锥，我们有

$$u \in L_t^4 L_x^{12}(\wedge(0;0,T_*)). \tag{7.3.37}$$

令 $0 \le t_0 < s < T_*$，然后应用 (7.3.9) 到方程 $\Box \partial u = -\phi'_\kappa(u)\partial u$，如同命题 7.3.3 的讨论给出

$$\sup_{t_0 \le t \le s} \Big(\int_{|x-x_0|<T_*-t} |\partial u(t,x)|^6 \mathrm{d}x\Big)^{1/6} = \|\partial u\|_{L_t^\infty L_x^6(\wedge(0;t_0,s))}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq C\sum_{|\alpha|\leq 2}\|\partial^\alpha u(t_0,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}+C\|\phi'_\kappa(u)\partial u\|_{L^1_tL^2_x(\Lambda(t_0,s))}\\
&\leq C\sum_{|\alpha|\leq 2}\|\partial^\alpha u(t_0,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}+C'\left(1+\|u^4\partial u\|_{L^1_tL^2_x(\Lambda(t_0,s))}\right)\\
&\leq C\sum_{|\alpha|\leq 2}\|\partial^\alpha u(t_0,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}+C'\left(1+\|u\|^4_{L^4_tL^{12}_x(\Lambda(t_0,s))}\|\partial u\|_{L^\infty_tL^6_x(\Lambda(t_0,s))}\right)\\
&\leq C(t_0)+C'\|u\|^4_{L^4_tL^{12}_x(\Lambda(t_0,s))}\|\partial u\|_{L^\infty_tL^6_x(\Lambda(t_0,s))}.
\end{aligned}
$$

由于 $u\in C^2([0,T_*)\times\mathbb{R}^3)$ 和当 $|x|$ 大时 u 为零, 常数 $C(t_0)$ 是有限的. 当 $t_0\to T_*$ 时, (7.3.37) 意味着不等式中 $L^4_tL^{12}_x$ 范数趋于 0. 因此, 我们得到, 如果 t_0 接近于 T_*,

$$\sup_{t_0\leq t<T_*}\left(\int_{|x-x_0|<T_*-t}|\partial u(t,x)|^6\mathrm{d}x\right)^{1/6}\leq 2C(t_0).$$

由 Hölder 不等式即可导致

$$\left(\int_{|x-x_0|<T_*-t}|\partial u(t,x)|^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}\leq 2C(t_0)\left(\frac{4\pi}{3}(T_*-t)^3\right)^{1/3},t_0\leq t<T_*,$$

因此,

$$\lim_{t\nearrow T_*}\int_{|x-x_0|<T_*-t}\frac{1}{2}|\partial u(t,x)|^2\mathrm{d}x=0.$$

这正是我们所要求的。

为完成整体存在性定理的证明, 剩下的只是说明 (7.3.36) 成立。为此我们将假设

$$u\in C^2([-T_*,0)\times\mathbb{R}^3)$$

是 $\Box u+\phi_\kappa(u)=0$ 在 $t=-T_*$ 具紧支集 Cauchy 初值的解。定理 7.3.1 的证明中的最后一步将是证明我们一定有

$$\lim_{t\nearrow 0}\int_{\{x:|x|<|t|\}}\Phi_\kappa(u)\mathrm{d}x=0. \tag{7.3.38}$$

这里为简化记号, 我们将 (7.3.36) 中 (T_*,x_0) 变换为原点。为此, 我们需要 Morawetz 恒等式 (1.3.17), 即

$$\sum_{j=1}^3\partial_j\left[\frac{\partial L}{\partial p_j}(u,\partial u)(u+\sum_{\kappa=0}^3x_\kappa\partial_\kappa u)-x_jL(u,\partial u)\right]=4\Phi_\kappa(u)-u\phi_\kappa(u)$$

或

$$\mathrm{div}_{t,x}(tQ+\partial_tuu,-tP)=4\Phi_\kappa(u)-u\phi_\kappa(u), \tag{7.3.39}$$

其中

$$Q=1/2|\partial u|^2+\Phi_\kappa(u)+t^{-1}\partial_tux\cdot\nabla_xu,$$

$$P = (1/2|\partial_t u|^2 - 1/2|\nabla_x u|^2 - \Phi_\kappa(u))x/t + (t^{-1}u + \partial_t u + t^{-1}x \cdot \nabla_x u)\nabla_x u.$$

由于我们已经改变了记号，简化了对证明所需要的恒等式，我们就得修改在局部能量讨论中用过的定义。如果 $T_* < T < S \le 0$，我们现在令

$$D_T = \{(T,x) : |x| \le -T\},$$

$$\wedge(T,S) = \{(t,x) : T \le t < S, |x| \le -t\}.$$

和

$$M_T^S = \{(t.x) : T \le t \le S, |x| = -t\}.$$

这样，$\wedge(T,S)$ 是过原点的后向光维与 $[T,S]\times\mathbb{R}^3$ 交。其边界能分成三个部分 D_T, D_S 和 M_T^S。

如果我们积分 (7.3.39)，应用散度定理得

$$\begin{aligned}
&\int_{D_S}(SQ + u\partial_t u)\mathrm{d}x - \int_{D_T}(TQ + u\partial_t u)\mathrm{d}x + \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{M_T^S}(tQ + u\partial_t u + x\cdot P)\mathrm{d}\sigma \\
= &\int\int_{\wedge(T,S)}(4\Phi_\kappa(u) - u\phi_\kappa(u))\mathrm{d}t\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

用 命题 7.3.2 和 Hölder 不等式发现当 $S \nearrow 0$ 时，第一项趋于 0。这样，取极限得到

$$\mathrm{I} + \mathrm{II} = \int\int_{\wedge(T,0)}(4\Phi_\kappa(u) - u\phi_\kappa(u))\mathrm{d}t\mathrm{d}x,$$

其中 $\mathrm{I}= -\int_{D_T}(TQ + u\partial_t u)\mathrm{d}x$, $\mathrm{II}= \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{M_T^0}(tQ + u\partial_t u + x\cdot P)\mathrm{d}\sigma$.

由假设 (7.3.5)，即当 $|u|$ 比一个固定常数大时，$u\phi_\kappa(u) - 4\Phi_\kappa(u) \ge 0$，我们得到

$$\mathrm{I} + \mathrm{II} \le CT^4. \tag{7.3.40}$$

为利用这个不等式，我们需要得到对 I 和 II 的下界，记住 I 中包含了我们想控制的项。

让我们先处理 II，注意到在 M_T^0 上，$t = -|x|$，我们就有

$$\begin{aligned}
\mathrm{II} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{M_T^0}[-|x||\partial_t u|^2 + 2\partial_t u x\cdot\nabla_x u - \frac{(x\cdot\nabla_x u)^2}{|x|} - u\frac{x}{|x|}\cdot\nabla_x u + u\partial_t u]\mathrm{d}\sigma \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{M_T^0}[|x|(\frac{x\cdot\nabla_x u}{|x|} - \partial_t u)^2 + u(\frac{x\cdot\nabla_x u}{|x|} - \partial_t u)]\mathrm{d}\sigma.
\end{aligned}$$

如果我们用 $y \to (-|y|, y), |y| \le |T|$ 来对 M_T^0 参数化，则 $\mathrm{d}\sigma = \sqrt{2}\mathrm{d}y$。令 $v(y) = u(-|y|, y)$，我们有 $y\cdot\frac{\nabla v}{|y|} = \frac{x\cdot\nabla_x u}{|x|} - \partial_t u$。

因此

$$\mathrm{II} = -\int_{|y|\le|T|}(\frac{|y\cdot\nabla v|^2}{|y|} + v\frac{y\cdot\nabla v}{|y|})\mathrm{d}y$$

$$= -\int_{|y|\le|T|}\frac{|y\cdot\nabla v+v|^2}{|y|}\mathrm{d}y+\int_{|y|\le|T|}[\frac{v^2}{|y|}+v\frac{y\cdot\nabla v}{|y|}]\mathrm{d}y.$$

为计算最后一项，注意到如果用极坐标，$y=rw$，则 $vy\cdot\frac{\nabla v}{|y|}=v\partial_r v=1/2\partial_r(v^2)$。因此，由分部积分，

$$\begin{aligned}\int_{|y|\le|T|}v\frac{y\cdot\nabla v}{|y|}\mathrm{d}y &= \frac{1}{2}\int_{S^2}\int_0^{|T|}\partial_r(v^2(rw))r^2\mathrm{d}r\mathrm{d}\sigma(w)\\ &= \frac{1}{2}\int_{S^2}v^2(|T|w)|T|^2\mathrm{d}\sigma(w)-\int_{S^2}\int_0^{|T|}v^2(rw)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\sigma(w)\\ &= \frac{1}{2}\int_{\partial D_T}u^2\mathrm{d}\sigma-\int_{|y|\le|T|}v^2\frac{\mathrm{d}y}{|y|}.\end{aligned}$$

与早期的公式组合，代回原来的坐标得

$$\mathrm{II}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{M_T^0}t|\frac{x}{|x|}\nabla_x u-\partial_t u+\frac{u}{|t|}|^2\mathrm{d}\sigma+\frac{1}{2}\int_{\partial D_T}u^2\mathrm{d}\sigma. \tag{7.3.41}$$

为处理 I，我们首先注意到在它的定义中的积分是

$$TQ+u\partial_t u=T(\frac{1}{2}|\partial u|^2+\Phi_\kappa(u))+\partial_t u(u+x\cdot\nabla_x u),$$

但

$$|\partial_t u(u+x\cdot\nabla_x u)|\le -T[\frac{1}{2}(\partial_t u)^2+\frac{1}{2}|\nabla_x u+\frac{x}{|x|^2}u|^2].$$

这样，

$$\begin{aligned}\mathrm{I} &\ge -T\int_{D_T}\Phi_\kappa(u)\mathrm{d}x-T\int_{D_T}(\frac{1}{2}|\nabla_x u|^2-\frac{1}{2}|\nabla_x u+\frac{x}{|x|^2}u|^2)\mathrm{d}x\\ &= |T|\int_{D_T}\Phi_\kappa(u)\mathrm{d}x+T(\int_{D_T}u\frac{x}{|x|^2}\cdot\nabla_x u\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_{D_T}\frac{u^2}{|x|^2}\mathrm{d}x).\end{aligned}$$

如前用分部积分，我们发现

$$\int_{D_T}u\frac{x}{|x|^2}\cdot\nabla_x u\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_{D_T}\frac{u^2}{|x|^2}\mathrm{d}x=1/2\int_{\partial D_T}\frac{-u^2}{T}\mathrm{d}\sigma.$$

因此

$$\mathrm{I}\ge|T|\int_{D_T}\Phi_\kappa(u)\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_{\partial D_T}u^2\mathrm{d}\sigma.$$

如果我们组合这与 (7.3.40) 和 (7.3.41)，可得

$$|T|\int_{D_T}\Phi_\kappa(u)\mathrm{d}x \le CT^4+\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{M_T^0}|t|\left|-\partial_t u+\frac{x}{|x|}\cdot\nabla_x u+\frac{u}{|x|}\right|^2\mathrm{d}\sigma \tag{7.3.42}$$

$$\leq (CT^4+\sqrt{2}|T|)\int_{M_T^0}\left|-\partial_t u-\frac{x}{|x|}\cdot\nabla_x u\right|^2\mathrm{d}\sigma+\int_{M_T^0}\frac{u^2}{|t|}\mathrm{d}\sigma.$$

由 (7.3.30), 最后一等式右端的第二项 $\leq 4|T|\mathrm{Flux}(u;M_T^0)$; 最后一项也能由能量流量控制. 事实上, 应用 (7.3.29) 和 Hölder 不等式, 我们看到这一项

$$\leq \left(\int_{M_T^0}|x|^{-3/2}\mathrm{d}\sigma\right)^{2/3}\left(\int_{M_T^0}u^6\mathrm{d}\sigma\right)^{1/3}\leq |T|C_0\left(\int_{M_T^0}(\Phi_\kappa(u)+1)\mathrm{d}\sigma\right)^{1/3}$$
$$\leq C_0^2(\mathrm{Flux}(u;M_T^0))^{1/3}+C_0|T|(4\pi|T|^3/3)^{1/3}.$$

现在将我们的最后两个估计式代到 (7.3.42), 得对小的 $|T|$,

$$\int_{D_T}\Phi_\kappa(u)\mathrm{d}x\leq C(|T|+\mathrm{Flux}(u;M_T^0)+(\mathrm{Flux}(u;M_T^0))^{1/3}).$$

由于以前我们看到当 $T\to 0$ 时, $\mathrm{Flux}(u;M_T^0)\to 0$, 最后就给出 (7.3.36).

§7.4 非线性波动方程的低正则解

考虑下面非线性波动方程

$$\begin{cases}\Box u=-|u|^{\kappa-1}u,\ t\in\mathbb{R},x\in\mathbb{R}^3,\kappa\in[2,5),\\ u(0,x)=u_0,\ u_t(0,x)=u_1.\end{cases}\tag{7.4.1}$$

已知如果 $(u_0,u_1)\in\dot{H}^s(\mathbb{R}^3)\times\dot{H}^{s-1}(\mathbb{R}^3)$, $s\in(\gamma(\kappa),1]$, 初值问题 (7.4.1) 在 $[0,T]$ 上是适定的, 其中 $T=T_s(\|(D^s u_0,D^{s-1}u_1)\|_{L^2})$.

$$\gamma(\kappa)=\begin{cases}\frac{3}{2}-\frac{2}{\kappa-1}, & 3\leq\kappa<5,\\ 1-\frac{1}{\kappa-1}, & 2\leq\kappa\leq 3.\end{cases}\tag{7.4.2}$$

上下界 $\gamma(\kappa)$ 是最佳的, 当 $\kappa\neq 2$ 时可以达到. 方程 (7.4.1) 的解至少形式地满足守恒律

$$\int_{\mathbb{R}^3}\left(|u_t|^2+|\nabla u|^2+\frac{2}{\kappa+1}|u|^{\kappa+1}\right)(x,t)\mathrm{d}x=\text{常数}.\tag{7.4.3}$$

这样对于初值

$$(u_0,u_1)\in\dot{H}^1\cap L^{\kappa+1}(\mathbb{R}^3)\times L^2(\mathbb{R}^3),\tag{7.4.4}$$

守恒律 (7.4.3) 可以延拓到任意时间区间的解. 我们将采用 Kenig, Ponce 和 Vega 的高低频分解方法讨论初值的正则性比 (7.4.4) 更低情形的整体适定性问题. 为计算的方便我们主要讨论 $\kappa=3$ 的情形, 即

$$\begin{cases}\Box u=-u^3,\ t\in\mathbb{R},x\in\mathbb{R}^3,\\ u(0,x)=u_0,\ u_t(0,x)=u_1.\end{cases}\tag{7.4.5}$$

在这一特殊情形，我们已知 $(u_0, u_1) \in \dot{H}^s \times \dot{H}^{s-1}$ [illegible] (7.4.5) 是局部适定的。如果 $(u_0, u_1) \in \dot{H}^1 \cap [illegible]$ [illegible] 是整体适定的。我们要证 [illegible]

定理 7.4.1 设 [illegible] 3 [illegible] $u_0 [illegible] \dot{H}^s$ [illegible] $\dot{H}$ [illegible] $T > 0$, (7.4.5) 存在唯一的 [illegible] t [illegible] 使得 [illegible] $\sup [illegible] T$ [illegible]

一般情形可以描述为

定理 7.4.2 设 [illegible]

$$\alpha(n) = \begin{cases} (26n - 3n^2 - 30 + 16n - 2n^2 \; 1 [illegible]) \\ [illegible] \end{cases}$$

如果 $(u_0, u_1) \in \dot{H}^s \cap L^{[illegible]}(\mathbb{R}^n) \times \dot{H}^{s-1}(\mathbb{R}^n)$，则对于任意给定的 T [illegible] 存在唯一的 $u(t, x)$ [illegible] $t < T$ 使得 [illegible] 且 [illegible] $CT^{[illegible]}$ [illegible]

$$\begin{cases} [illegible] \\ [illegible] \end{cases}$$

高低频分解的方法首先是由 Bourgain 在处理 Schrödinger 方程时 [illegible] 本想法如下：将初值分成高频和低频两部分，对于低频部分在 [illegible] 时间 [illegible] 求解原来的问题，ΔT 的选取依赖于初值的正则性，其解 $v(t)$ 有足够的 [illegible] 是守恒律，然后用 $v(t)$ 找出时间区间 $[0, \Delta T]$ 上的 $w(t)$ [illegible] 余部分 $w(t)$ 是在 $\dot{H}^1$ 中的，这样，我们把 $t = \Delta T$ 到 $t = \Delta T$，在 ΔT [illegible] 上面的 [illegible]，以此类推。在这一过程中 [illegible] 这一过程的一致性，这样就要求对 s 的限制。

为证定理 7.4.1，我们回顾对于与此相应的 [illegible] 方程

$$\begin{cases} [illegible] u = 0, \; t [illegible] \\ u(0, x) = u_0, \; u_t(0, x) = [illegible] \end{cases}$$

的解对于任何 $\theta \in [0, 1]$，我们有如下的估计

$$\|D^{1-\theta} u\|_{L^{[illegible]}_t L^{[illegible]}_x} = \left(\int [illegible] \left(\int |D^{[illegible]} u(t, x)| [illegible] \right)^{[illegible]} \right)^{[illegible]} \le C_n \|Du_0 [illegible]\|_{[illegible]}$$

将初值函数 $(u_0, u_1) \in \dot{H}^s \cap L^{[illegible]}(\mathbb{R}^n) \times \dot{H}^{s-1}$ 分解成低频与高频两部分，取 [illegible] 使得当 $|\xi| < 1$ 时，$\phi(\xi) = 1$；当 $|\xi| \ge 2$ 时，$\phi(\xi) = 0$，记 $\phi_N(\xi)$ [illegible] 定义 $u_0 = u_{0,1} + u_{0,2}$，$u_1 = u_{1,1} + u_{1,2}$，其中 $u_{0,1}(x) = \mathcal{F}^{-1}\phi_N(\xi)\hat{u}_0 [illegible]$，$u_{1,1}(x) = \mathcal{F}^{-1}\phi_N(\xi)\hat{u}_1(x)$，$N$ 待定。这样

$$\|(Du_{0,1}, D^{[illegible]} u_{1,1})\|_{L^2} \le N^{[illegible]}, \quad s [illegible] \tag{7.4.8}$$

和

$$\|(D^l u_{0,2}, D^{l-1}u_{1,2})\|_{L^2} \leq N^{l-s}, l \in [0,s]. \tag{7.4.9}$$

先考虑正则初值问题

$$\begin{cases} \Box v = -v^3, \ t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^3, \\ v(0,x) = u_{0,1} \ v_t(0,x) = u_{1,1}. \end{cases} \tag{7.4.10}$$

我们知道其解满足

$$v(t) = W'(t)u_{0,1} + W(t)u_{1,1} - \int_0^t W(t-t')v^3(t')\mathrm{d}t'.$$

从 $v(x,t)$ 所满足的守恒律 (7.4.3), 以及 (7.4.8) 可得对于 $t \geq 0$ 成立

$$\|(\partial_t v, \nabla v)(t)\|_{L^2} + \|v(t)\|_{L^4}^2 \sim N^{1-s}. \tag{7.4.11}$$

对于 $\theta \in [0,1)$

$$\begin{aligned} \|D^{1-\theta}v\|_{L^{2/\theta}_{\Delta T}L^{2/(1-\theta)}_x} &= \left(\int_0^{\Delta T} \|D^{1-\theta}v\|^{2/\theta}_{L^{2/(1-\theta)}_x}\mathrm{d}t\right)^{\theta/2} \\ &\leq C_\theta N^{1-s} + C_\theta \int_0^{\Delta T} \|v^3\|_{L^2_x}\mathrm{d}t \\ &\leq C_\theta N^{1-s} + C_\theta \|v\|^3_{L^3_{\Delta T}L^6_x} \\ &\leq C_\theta N^{1-s} + C_\theta \Delta T \|v\|^3_{L^\infty_{\Delta T}L^6_x}. \end{aligned}$$

由 Sobolev 嵌入定理知 $\|v\|_{L^6} \leq C\|v\|_{\dot{H}^1} \lesssim N^{1-s}$。这样要使

$$\|D^{1-\theta}v\|_{L^{2/\theta}_{\Delta T}L^{2/(1-\theta)}_x} \leq C_\theta N^{1-s} + C_\theta \Delta T N^{3(1-s)} \leq CN^{1-s}, \tag{7.4.12}$$

我们取

$$\Delta T \sim N^{-2(1-s)}. \tag{7.4.13}$$

令 $y(t) = u(t) - v(t)$, 接下来考虑 y 满足的初值问题

$$\begin{cases} \Box y = -(y+v)^3 + v^3, \ t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^3, \\ y(0,x) = u_{0,2} \ y_t(0,x) = u_{1,2}. \end{cases} \tag{7.4.14}$$

其积分形式

$$\begin{aligned} y(t) &= W'(t)u_{0,2} + W(t)u_{1,2} - \int_0^t W(t-t')F(t')\mathrm{d}t' \\ &\leq W'(t)u_{0,2} + W(t)u_{1,2} + z(t), \end{aligned}$$

其中 $F = y^3 + 3y^2v + 3yv^2$。

由 (7.4.9), 对任何 $l \le s, \theta \in [0,1)$

$$\begin{aligned} \|D^{l-\theta}y\|_{L^{2/\theta}_{\Delta T}L_x^{2/(1-\theta)}} &\le c_\theta N^{l-s} + c_\theta \int_0^{\Delta T} \|D^{l-1}F(t)\|_{L^2}\mathrm{d}t \\ &\le c_\theta N^{l-s} + c_\theta \|F\|_{L^1_{\Delta T}L_x^{6/(5-2l)}}. \end{aligned} \tag{7.4.15}$$

为对任何的 $l \in [4/7, s]$ 估计 F, 注意到 $y^2 v = (y^3)^{1/2}(yv^2)^{1/2}$, 我们只要估计 y^3 和 yv^2。

$$\begin{aligned} \|y^3\|_{L^1_{\Delta T}L_x^{6/(5-2l)}} &\le \|y\|^3_{L^3_{\Delta T}L_x^{18/(5-2l)}} \\ &\le (\Delta T)^{2l-1}\|y\|^{4(1-l)/l}_{L^{2/l}_{\Delta T}L_x^{2/(1-l)}}\|D^l y\|^{(7l-4)/l}_{L^\infty_{\Delta T}L^2_x}, \end{aligned} \tag{7.4.16}$$

和对于 $l \ge 4/7$

$$\begin{aligned} 3\|v^2 y\|_{L^1_{\Delta T}L_x^{6/(5-2l)}} &\le c\Delta T\|v\|^2_{L^\infty_{\Delta T}L^6_x}\|y\|_{L^\infty_{\Delta T}L_x^{6/(3-2l)}} \\ &\le c\Delta T\|v\|^2_{L^\infty_{\Delta T}L^6_x}\|D^l y\|_{L^\infty_{\Delta T}L^2_x}. \end{aligned} \tag{7.4.17}$$

因此, 定义

$$|||y|||_l = \|D^l y\|_{L^\infty_{\Delta T}L^2_x} + \|y\|_{L^{2/l}_{\Delta T}L_x^{2/(1-l)}},\ l \in [1/2, 1), \tag{7.4.18}$$

取 (7.4.15) 中的 $\theta = l, 0$, 综合 (7.4.15)-(7.4.17), 可得对于 $l \in [4/7, s]$ 有

$$|||y|||_l \le c_\theta(N^{l-s} + (\Delta T)^{2l-1}|||y|||_l^3 + \Delta T N^{2(1-s)}|||y|||_l).$$

因此, 由 (7.4.13) 我们有对于 $l \ge 4/7$,

$$|||y|||_l \le c_\theta N^{l-s}. \tag{7.4.19}$$

对于 $l \in [1/2, 4/7)$,

$$|||y|||_l \le c_\theta(N^{l-s} + (\Delta T)^{1/3}|||y|||^2_{2/3}|||y|||_l + \Delta T N^{2(1-s)}|||y|||_l),$$

组合 (7.4.19) 得: 如果 $s \ge 2/3$, 则对于 $l \in [1/2, s]$

$$|||y|||_l \le c_\theta N^{l-s}. \tag{7.4.20}$$

对于 y 的低阶估计, 如果 $s \ge 2/3$, 我们可得

$$\begin{aligned} \|y\|_{L^\infty_{\Delta T}L^2_x} &\le c_\theta N^{-s} + c\|F(t)\|_{L^1_{\Delta T}L_x^{6/5}} \\ &\le c_\theta N^{-s} + c(\Delta T)^{1/3}\|y\|_{L^\infty_{\Delta T}L^2_x}\|y\|^2_{L^3_{\Delta T}L^6_x} + c\Delta T\|y\|_{L^\infty_{\Delta T}L^2_x}\|v\|^2_{L^\infty_{\Delta T}L^6_x} \\ &\le cN^{-s} + c\Delta T N^{2(1-s)}\|y\|_{L^\infty_{\Delta T}L^2_x}, \end{aligned} \tag{7.4.21}$$

这意味着对于 $s \ge 2/3$, $\Delta T \sim N^{-2(1-s)}$,

$$\|y\|_{L^\infty_{\Delta T}L^2_x} \le cN^{-s}. \tag{7.4.22}$$

结合 (7.4.20) 和 (7.4.22) 得 [illegible]

$$[illegible] \tag{7.4.23}$$

[illegible] (ΔT) [illegible]

$$[illegible] \tag{7.4.24}$$

[illegible]

$$[illegible] \le cN^{2-3s} \tag{7.4.25}$$

[illegible] Hölder 不等式

$$[illegible] \tag{7.4.26}$$

[illegible] 2 [illegible]

$$\|(\partial_t [illegible] \Delta T) [illegible] \le c_\theta N^{2\theta [illegible] (6\theta-3)} \tag{7.4.27}$$

最后我们估计 [illegible] ΔT [illegible] 由 Minkowski 不等式, Sobolev 不等式和 [illegible] 得

$$[illegible] \tag{7.4.28}$$

为估计 [illegible] 注意到

$$\|u^3\|_{L^1_{\Delta T}L^2} = \|u\|^3_{L^3_{\Delta T}L^6} \le c(\Delta T)^{1/12}\|u\|^3_{L^4_{\Delta T}L^6} \le [illegible] \le cN^{[illegible]}$$

和

$$\|uv^2\|_{L^1_{\Delta T}L^2} \le c(\Delta T)^{3/4}\|u\|_{L^4_{\Delta T}L^\infty}\|v\|^2_{L^4_{\Delta T}L^4_x} \le cN^{(2-3s)/2}.$$

我们有

$$\|z(\Delta T)\|^2_{L^2} \le cN^{(2-3s)}. \tag{7.4.29}$$

从 (7.4.27) 和 (7.4.29) 我们得

$$\|(\partial_t z, \nabla z)(\Delta T)\|_{L^2} + \|z(\Delta T)\|^2_{L^4} \sim c_\theta N^{3\theta-1-s(6\theta-3)}. \tag{7.4.30}$$

接下来我们在区间 $[\Delta T, 2\Delta T]$ 中解满足初值

$$(u(\Delta T)+z(\Delta T), \partial_t u(\Delta T)+\partial_t z(\Delta T))$$

的方程 (7.4.10)，然后将其解代入 (7.4.14)，在区间 $[\Delta T, 2\Delta T]$ 中求解

$$(W^{\theta}(\Delta T) \ldots \text{[illegible]})$$

的此方程。重复上面的估计

为达到时刻 T，我们应用上面的讨论

$$\frac{T}{\Delta T} = TN^{2(1-s)}$$

次。最后可得 (7.4.11) 的右端是 (参考 (7.4.30))

$$c_0 T N^{2(1-s)} N^{3\theta-1-s(3\theta-3)}.$$

为使上面的计算一致可行我们要求

$$c_0 T N^{2(1-s)} N^{3\theta-1-s(3\theta-3)} \leq N^{1-s}.$$

如果 $s > 3/4$，我们可以通过取一固定的数 θ 充分接近于 1 使得上面 [illegible]

现在可取 N 充分大而完成证明。

对于一般维数的证明及 Klein-Gordon 方程相应结果可见 [46] 和 [47]。

参考文献

[1] Ancona, P., Georgiev, V. Wave maps and ill-posedness of their Cauchy problem. New trends in the theory of hyperbolic equations, 1–111. *Oper. Theory Adv. Appl.*, 159, Basel: Birkhäuser, 2005.

[2] Beals, M. Self-Spreading and strength of singularities for solutions to semilinear wave equations. *Ann. of Math.*, 1983(118): 187–214.

[3] Bourgain, J. Fourier transform restriction phenomena for certain lattice subsets and applications to nonlinear evolution equations., Parts I, II. *Geom. Funct. Anal.*, 1993(3): 107–156, 209–262.

[4] Brenner, P. On space-time means and strong global solutions of nonlinear hyperbolic equations. *Math. Z.*, 1989(201): 45–55.

[5] Cazenave, T., Haraux, A. An introduction to semilinear evolution equations. Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications, 13. New York: The Clarendon Press, Oxford University Press, 1998.

[6] Christodoulou, D. Global solutions of nonlinear hyperbolic equations for small initial data. *Comm. Pure Appl. Math.*, 1986(39): 267-282.

[7] Christ, M., Kiselev, A. Maximal Functions Associated to Filtrations. *J. Funct. Anal.*, 2001(179): 409–425.

[8] Christ, M., Lectures on singular integral operators. CBMS Regional Conference Series in Mathematics, 77. Providence: Amer. Math. Soc., 1990.

[9] Delort, J. Sur le temps d'existence pour l'équation de Klein-Gordon semi-linéaire en dimension 1. *Bull. Soc. Math. France*, 1997(125): 269–311.

[10] Delort, J., Fang, D. Almost global existence for solutions of semilinear Klein-Gordon equations with small weakly decaying Cauchy data. *Comm. Partial Differential Equations*, 2000(25): 2119–2169.

[11] Delort, J., Fang, D., Xue, R. Global existence of small solutions for quadratic quasilinear Klein-Gordon systems in two space dimensions. *J. Funct. Anal.*, 2004(211): 288–323.

[12] Escobedo, M., Vega, L. A semilinear Dirac equation in $H^s(\mathbb{R}^3)$ for $s > 1$. *SIAM J. Math. Anal.*, 1997(28): 338–362.

[13] Fang, D., Wang, C. Some remarks on Strichartz estimates for homogeneous wave equation. *Nonlinear Anal.*, 2006(65): 697–706.

[14] Fang, D., Xue, R. Global existence of small solutions for cubic quasi-linear Klein-Gordon systems in one space dimension. *Acta Math. Sin. (Engl. Ser.)*, 2006(22): 1085–1102.

[15] Foschi, D. Lecture notes from Klainerman's course in Paris. 1998.

[16] Foschi, D. Inhomogeneous Strichartz estimates. *J. Hyperbolic Differ. Equ.*, 2005(2): 1–24.

[17] Foschi, D., Klainerman, S. Homogeneous L^2 bilinear estimates for wave equations. *Ann. Scient. ENS 4e serie*, 2000(23): 211–274.

[18] Ginibre, J., Velo, G. The global Cauchy problem for the nonlinear Klein-Gordon equations. *Math. Z.*, 1985(189): 487–505.

[19] Godin, P. Lifespan of solutions of semilinear wave equations in two space dimensions. *Comm. Partial Differential Equations*, 1993(18): 895–916.

[20] Grillakis, M. Regularity and asymptotic behavior of the wave equation with a critical nonlinearity. *Ann. of Math.*, 1990(132),485–509.

[21] Hörmander, L. Lectures on Nonlinear Hyperbolic Differential Equations. Berlin: Springer-Verlag, 1997.

[22] Hörmander, L. The lifespan of classical solutions of nonlinear hyperbolic equations. Lecture Notes in Math., 1256. Berlin: Springer, 1987: 214–280.

[23] Jörgens, K. Das Anfangswertproblem im Grossen für eine Klasse nichtlinear Wellengleichungen. *Math. Z.*, 1961(77): 295–308.

[24] John, F. Nonlinear wave equations, formation of singularities. University Lecture Series, 2. Providence: American Mathematical Society, 1990.

[25] John, F. Existence for large times of strict solutions of nonlinear wave equations in three space dimensions for small initial data. *Comm. Pure Appl. Math.*, 1987(40): 79–109.

[26] John, F. Blow-up of solutions of nonlinear wave equations in three space dimensions. *Manuscripta Math.*, 1979(28): 235–265.

[27] John, F. Blow-up for quasilinear wave equations in three space dimensions. *Comm. Pure Appl. Math.*, 1981(34): 29–51.

[28] John, F. Blow-up of radial solutions of $u_{tt} = c^2\Delta u$ in three space dimensions. *Mat. Apl. Comput.*, 1985(4): 3–18.

[29] Keel, M., Tao, T. Small data blow-up for semilinear Klein-Gordon equations. *Amer. J. Math.*, 1999(121): 629–669.

[30] Keel, M., Tao, T., Endpoint Strichartz Estimates. *Amer. J. Math.*, 1998(120): 955-980.

[31] Klainerman, S. Global existence for nonlinear wave equations. *Comm. Pure Appl. Math.*, 1980(33): 43–101.

[32] Klainerman, S. Uniform decay estimates and the Lorentz invariance of the classical wave equation. *Comm. Pure and Appl. Math.*, 1985(38): 321–332.

[33] Klainerman, S. The null condition and global existence to nonlinear wave equations. Nonlinear systems of partial differential equations in applied mathematics, Part 1 (Santa Fe, N.M., 1984), 293–326, Lectures in Appl. Math., 23. Providence: Amer. Math. Soc., 1986.

[34] Klainerman, S. Global existence of small amplitude solutions to nonlinear Klein-Gordon equations in four space-time dimensions. *Comm. Pure Appl. Math.*, 1985(38): 631-641.

[35] Klainerman, S. On the regularity of classical field theories in Minkowski space-time R^{3+1}. Nonlinear partial differential equations in geometry and physics (Knoxville, TN, 1995), 29–69, Progr. Nonlinear Differential Equations Appl., 29, Basel: Birkhäuser, 1997.

[36] Klainerman, S., Christodoulou, D. The global nonlinear stability of the Minkowski space. Princeton: Princeton Univ. Press, 1993.

[37] Klainerman, S., Machedon, M. Space-time estimates for null forms and the local existence theorem. *Comm. Pure Appl. Math.*, 1993(46): 1221-1268.

[38] [illegible] S., Machedon, M. Smoothing estimates for null forms and applications. [illegible] Math. Res. Notices. 1994(9): 383ff., approx. 7 pp.

[illegible] [illegible], S., Selberg, S. Bilinear estimates and applications to nonlinear wave [illegible] Commun. Contemp. Math., 2002(4): 223–295.

[illegible] [illegible]，[illegible] 非线性发展方程，科学出版社，1989.

[illegible] [illegible], H. A sharp counterexample to local existence of low regularity solutions [illegible] wave equations. Duke Math. J., 1993(72): 503–539.

[illegible] [illegible], H. Counterexamples to local existence for quasilinear wave equations. [illegible] Lett., 1998(5): 605–622.

[illegible] [illegible], H., Sogge, C. D. About small-power semilinear wave equations. Partial dif[illegible] equations and mathematical physics (Copenhagen, 1995; Lund, 1995), 211–[illegible], [illegible] Nonlinear Differential Equations Appl., 21. Boston: Birkhäuser Boston, 1996.

[illegible] [illegible], H., Sogge, C. D. On existence and scattering with minimal regularity for [illegible] wave equations. J. Funct. Anal., 1995(130): 357–426.

[illegible] [illegible], S., Nakamura, M., Nakanishi, K., Ozawa, T. Endpoint Strichartz es[illegible] global solutions for the nonlinear Dirac equation. J. Funct. Anal., [illegible] 20.

[46] Miao, C., Zhang, B. H^s-global well-posedness for semilinear wave equations. *J. Math. Anal. Appl.*, 2003(283): 645–666.

[47] Miao, C., Zhang, B., Fang, D. Global well-posedness for the Klein-Gordon equation below the energy norm. *J. Partial Differential Equations*, 2004(17): 97–121.

[48] Moriyama, K., Tonegawa, S., Tsutsumi, Y. Almost global existence of solutions for the quadratic semilinear Klein-Gordon equation in one space dimension. *Funkcial. Ekvac.*, 1997(40): 313–333.

[49] Ozawa, T., Tsutaya, K., Tsutsumi, Y. Global existence and asymptotic behavior of solutions for the Klein-Gordon equations with quadratic nonlinearity in two space dimensions. *Math. Z.*, 1996(222): 341–362.

[50] Rauch, J. The u^5 Klein-Gordon equation. Nonlinear Partial differential equations and their applications (H. Brezis and J. L. Lions, eds), 335-364. Res. Notes in Math., 53. Boston: Pitman, 1981.

[51] Rauch, J., Reed, M. Nonlinear microlocal analysis of semilinear hyperbolic systems in one space dimension. *Duke Math. J.*, 1982(49): 397–475.

[52] Shatah, J. Normal forms and quadratic nonlinear Klein-Gordon equations. *Comm. Pure Appl. Math.*, 1985(38): 685–696.

[53] Shatah, J., Struwe, M. Geometric wave equations. Courant Lecture Notes in Mathematics, 2. New York: New York University, Courant Institute of Mathematical Sciences, Providence: American Mathematical Society, 1998.

[54] Sideris, T. Nonexistence of global solutions to semilinear wave equations in high dimensions. *J. Differential Equations*, 1984(52): 378–406.

[55] Sogge, C. Lectures on nonlinear wave equations, Monographs in analysis. Monographs in Analysis, II. Boston: International Press, 1995.

[56] Sterbenz, J., Angular regularity and Strichartz estimates for the wave equation, With an appendix by Igor Rodnianski. *Int. Math. Res. Not.*, 2005(4): 187–231.

[57] Strauss, W. Nonlinear wave equations. Providence: American Mathematical Society, 1989.

[58] Strauss, W. On weak solutions of semilinear hyperbolic equations. *An. Acad. Bras. Ci.*, 1970(42): 645–651.

[59] Struwe, M. Global regular solutions to the u^5 Klein-Gordon equation. *Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa*, 1988(15): 495–513.

[60] Sunagawa, H. On global small amplitude solutions to systems of cubic nonlinear Klein-Gordon equations with different mass terms in one space dimension. *J. Differential Equations*, 2003(192): 308–325.

[61] Sunagawa, H. A note on the large time asymptotics for a system of Klein-Gordon equations. *Hokkaido Math. J.*, 2004(33): 457–472.

[62] Sunagawa, H. Large time asymptotics of solutions to nonlinear Klein-Gordon systems. *Osaka J. Math.*, 2005(42): 65–83.

[63] Tataru, D. Local and global results for wave maps I. *Comm. Partial Differential Equations*, 1998(23): 1781–1793.

[64] Tartar, L. An introduction to Sobolev spaces and interpolation spaces. Lecture Notes of the Unione Matematica Italiana, 3. Berlin: Springer, 2007.

[65] Xue, R., Fang, D. Global existence of solutions for quadratic quasilinear Klein-Gordon systems in one dimension. *Acta Mathematica Scientia*, 2005(25): 346–358.

[66] Xue, R., Fang, D. Global existence and asymptotics behavior of solutions for a resonant Klein-Gordon system in two space dimensions. *Chinese Ann. Math. Ser. B*, 2005(26): 89–104.

[67] Yordanov, B. Blow up for the one dimensional Klein-Gordon equation with a cubic nonlinearity, Preprint 1995.

[68] Zhou, Y. Blow up of classical solutions to $\Box u = |u|^{1+\alpha}$ in three space dimensions. *J. Partial Differential Equations*, 1992(5): 21–32.

[69] Zhou, Y. Cauchy problem for semilinear wave equations in four space dimensions with small initial data. *J. Partial Differential Equations*, 1995(8): 135–144.

[General Information]
书名=非线性波动方程
作者=方道元编著
页数=267
SS号=12083940
DX号=
出版日期=2008.8
出版社=浙江大学出版社